Séance 1 de Mécanique des fluides 2 : ondes, couches limites et turbulence

Emmanuel Plaut, Hervé Combeau, Mathieu Jenny, Jean-Sébastien Kroll-Rabotin

Page web : http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mf

Compléter le module **Mécanique des fluides 1**

- en continuant à réfléchir à la **physique**
- en enrichissant celle-ci de nouveaux phénomènes : **compressibilité**, **interfaces**...
- en allant plus vers le « **calcul** » en fonction des situations
  - **ondes** → **analyses linéaires de stabilité** analytiques
  - **couches limites** → **éq. de Prandtl** → **EDO** résolues num. avec **Matlab**
  - **turbulence** → **modèles de Prandtl & Karman, modèle** $k-\epsilon$...

pour affronter

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\nabla \mathbf{v}\right)\cdot \mathbf{v}\right] = -\nabla \hat{p} + \eta \Delta \mathbf{v}} . \qquad \text{(NS)}$$

Séance 1 de Mécanique des fluides 2 : O, CL, T

Emmanuel Plaut

Modèle du fluide parfait appliqué aux écoulements instationnaires : ondes sonores...

1. **Les ondes sonores, ou de la compressibilité des fluides...**
   ...exemple d'**ondes non dispersives**...

2. **Critère d'effets de compressibilité dans les fluides**

3. **TD**

Hervé Combeau, Mathieu Jenny, Jean-Sébastien Kroll-Rabotin

Ondes sonores... ou de la compressibilité des fluides

Elles sont calculées par **analyse linéaire de stabilité** de l'état de repos

$$p = p_0 \ , \quad \rho = \rho_0 \ , \quad \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}} \ ,$$

d'un **fluide parfait compressible** (non pesant)

Ondes $\longleftrightarrow$ perturbations

$$p = p_0 + p' \ , \quad \rho = \rho_0 + \rho' \ , \quad \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}} + \bar{\mathbf{v}}' = \bar{\mathbf{v}}' \ ,$$

rapidement oscillantes, par ex. les ondes planes sont en

$$\exp[i(kx - \omega t)] \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi f \ , \quad 16 \text{ Hz} \lesssim f \lesssim 16 \text{ kHz}$$

$\Longrightarrow$ les particules fluides n'ont pas le temps d'échanger de la chaleur
$\longleftrightarrow$ **évolution adiabatique réversible** ou **isentropique**

Avec le **coefficient de compressibilité isentropique**

$$\kappa_S = \frac{1}{\rho} \left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right|_S = -\frac{1}{\mathcal{V}} \left.\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p}\right|_S$$

on a

$$\rho' = \rho_0 \kappa_S \ p' \ . \qquad \text{(Thermo)}$$

Ondes sonores... ou de la compressibilité des fluides

Loi de conservation de la masse linéarisée

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \, \mathrm{div}\overline{\mathbf{v}} \qquad \text{(masse)}$$

$+$ équation d'Euler linéarisée

$$\rho_0 \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\overline{\boldsymbol{\nabla}} p' \qquad \text{(Euler)}$$

$\Longrightarrow$ équation de propagation (de d'Alembert)

$$\boxed{\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \kappa_S} \Delta p'} \, .$$

Modes normaux ondes planes neutres en $\exp[i(kx - \omega t)]$ avec

$$\boxed{v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\rho \, \kappa_S}}} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c^2 \Delta p'} \, .$$

- **liquide = eau en condit° atmos.** : $\kappa_S \simeq 5\ 10^{-10}\ \mathrm{Pa}^{-1} \Longrightarrow c \simeq 1400\ \mathrm{m/s}$
- **gaz = en condit° atmos.** : $\kappa_S \simeq 7{,}05\ 10^{-6}\ \mathrm{Pa}^{-1} \Longrightarrow c \simeq 343\ \mathrm{m/s}$

De la **dispersion** d'ondes en général

Connaissant la relation $\omega = \omega(k)$, on considère, dans une situation quasi-1D, un « **paquet d'ondes** » centrées sur le nombre d'onde k :

$$\zeta(x,t) \; = \; \sum_{q \ll k} \widehat{A}(k+q) \exp\{i[(k+q)x - \omega(k+q)t]\} \; + \; c.c.$$

$$\zeta(x,t) \; = \; \underbrace{E(x,t)}_{\text{enveloppe lentement variable}} \; \underbrace{\exp\{i[kx - \omega(k)t]\}}_{\text{porteuse}} \; + \; c.c.$$

En 1ère approximation l'enveloppe qui décrit les modulations de la porteuse est une onde se propageant à la **vitesse de groupe**

$$v_g(k) \; = \; \frac{d\omega}{dk} \; .$$

Ondes **dispersives** $\Leftrightarrow$ v_g dépend de k (ou ω) $\Leftrightarrow$ $v_p \; = \; \dfrac{\omega}{k}$ dépend de k (ou ω).

Ondes **non dispersives**

$$\Leftrightarrow \; v_g = \frac{d\omega}{dk} = constante = c \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = ck \quad \Longleftrightarrow \quad v_p \; = \; \frac{\omega}{k} \; = \; c \text{ indépendant de } k \; .$$

Les **ondes sonores** sont **non dispersives** !

Ondes sonores... ou de la compressibilité des fluides

Équation de propagation (de d'Alembert)

$$\boxed{\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c^2 \Delta p'}$$

Discussion sur la forme des solutions

- en géométrie 1D cartésienne, $p' = p'(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$
- en géométrie 3D sphérique, $p' = p'(r,t) = \frac{1}{r}F(r - ct) + \frac{1}{r}G(r + ct)$

  $\Rightarrow$ effet d'atténuation (pas d'amortissement !)...

Critère d'effets de compressibilité dans les fluides

- Écoulement de vitesse caractéristique V
- Théorèmes de Bernoulli $\quad \Longrightarrow \quad p' \simeq \rho_0 V^2$
- Relation thermodynamique

$$\rho' = \frac{p'}{c^2} \simeq \frac{\rho_0 V^2}{c^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\rho'}{\rho_0} \simeq \frac{V^2}{c^2} = M^2$$

avec le **nombre de Mach**

$$\boxed{M = \frac{V}{c}}$$

TD de 16h30 à 18h30

Chargé de TD	Salle
Mathieu Jenny	P204
Hervé Combeau	P206
Jean-Sébastien Kroll-Rabotin	P213-215-217

Pb 3.3 *Étude détaillée d'ondes sonores planes*

- quantifier les approximations faites en cours
- cacractériser la structure fine de l'onde, jusqu'au champ de déplacement
- définir différentes intensités acoustiques
- déterminer les ordres de grandeur ⚠ piège sur une appli. num.

Ex 3.1 *Étude de l'effet coup de bélier*

- effet important et dangereux pour des installations industrielles !