Exemple de présentation beamer - LaTeX : début d'un séminaire sur la modélisation de la turbulence pour la CFD

Emmanuel Plaut

1 Motivations :
les écoulements turbulents sont omniprésents dans la nature et l'industrie...

Ils impliquent des **fluctuations de très petites échelles spatiales et temporelles**

$\Rightarrow$ **DNS et même LES impossibles**

$\Rightarrow$ **besoin de modèles de turbulence pour la CFD** !

1 Motivations : équations des modèles de turbulence pour la CFD
très souvent construites à partir d'analyses physico - dimensionnelles,
dans le brouillard pour les modèles les plus anciens !
Approche plus systématique possible,
au vu des progrès réalisés en expérimentations et DNS ?

1 Motivations : équations des modèles de turbulence pour la CFD
très souvent construites à partir d'analyses physico - dimensionnelles,
dans le brouillard pour les modèles les plus anciens !
Approche plus systématique possible,
au vu des progrès réalisés en expérimentations et DNS ?

Ici, approche RANS : bases, exemples, questions & problèmes

1.1 Moyenne de Reynolds, Hypothèse de viscosité turbulente de Boussinesq (1870s)

1.2 Énergie cinétique turbulente k, dissipation turbulente ϵ (1970s)

Launder & Spalding 1974 modèle $k - \epsilon$: **tests a priori** avec la base de données DNS de Lee & Moser 2015 :
équation de k ok ! **mais** équation de ϵ mauvaise !

1.1 Approche RANS : équation de V - Modèles à viscosité turbulente

- **Décomposition de Reynolds :** champs de vitesse et pression : **moyenne** + **fluctuations :**

$$\boxed{\underbrace{v_i}_{\text{composante de vitesse}} = \underbrace{\overline{v_i}}_{\text{moyenne } V_i} + \underbrace{u_i}_{\text{fluctuations}}} \qquad \boxed{\underbrace{p}_{\text{pression}} = \underbrace{\overline{p}}_{\text{moyenne } P} + \underbrace{\widetilde{p}}_{\text{fluctuations}}}$$

- Insertion dans l'**équation de Navier-Stokes** :

$$\rho\big[\partial_t v_i + \partial_{x_j}(v_i v_j)\big] = \partial_{x_j}(\sigma_{ij}) = -\partial_{x_i} p + \partial_{x_j}(\tau_{ij})$$

avec le **tenseur des contraintes visqueuses** $\boxed{\tau_{ij} = 2\mu D_{ij}(\mathbf{v})}$ partie de $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}(\mathbf{v})$,

μ **viscosité** dynamique, $D_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\partial_{x_j} v_i + \partial_{x_i} v_j)$ = **tenseur des taux de déformation**.

Prise de moyenne... Comme $\overline{v_i v_j} = \overline{v_i}\ \overline{v_j} + \overline{u_i u_j}$ $\rightarrow$ **équation RANS exacte :**

$$\boxed{\rho\big[\partial_t V_i + \partial_{x_j}(V_i V_j)\big] = -\partial_{x_i} P + \partial_{x_j}(2\mu S_{ij}(\mathbf{V})) + \partial_{x_j}(\tau_{ij})} \qquad (V\text{eq})$$

avec le **tenseur des contraintes de Reynolds** $\boxed{\tau_{ij} = -\rho\,\overline{u_i u_j} = -\rho \text{ covariance}(v_i v_j)}$

$\longleftrightarrow$ **influence des fluctuations turbulentes** sur le **champ moyen**.

1.1 Approche RANS : équation de V - Modèles à viscosité turbulente

- **Équation de Navier-Stokes**

$$\rho\big[\partial_t v_i \;+\; \partial_{x_j}(v_i v_j)\big] \;=\; -\partial_{x_i} p \;+\; \partial_{x_j}(\tau_{ij})$$

avec le **tenseur des contraintes visqueuses** $\boxed{\tau_{ij} \;=\; 2\mu D_{ij}(\mathbf{v})}$ partie de $\sigma_{ij} \;= -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}(\mathbf{v})$,

$\rightarrow$ **équation RANS exacte** $\boxed{\rho\big[\partial_t V_i \;+\; \partial_{x_j}(V_i V_j)\big] \;=\; -\partial_{x_i} P \;+\; \partial_{x_j}(2\mu S_{ij}(\mathbf{V})) \;+\; \partial_{x_j}(\tau_{ij})}$ $(V\text{eq})$

avec le **tenseur des contraintes de Reynolds** $\boxed{\tau_{ij} \;= -\rho\;\overline{u_i u_j} \;= -\rho\ \text{covariance}(v_i v_j)}$

$\boxed{k = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}}$ = **énergie cinétique turbulente** (massique) $=$ 0 à la paroi

1.1 Approche RANS : équation de V - Modèles à viscosité turbulente

- **Équation de Navier-Stokes**

$$\rho\left[\partial_t v_i + \partial_{x_j}(v_i v_j)\right] = -\partial_{x_i} p + \partial_{x_j}(\tau_{ij})$$

avec le **tenseur des contraintes visqueuses** $\boxed{\tau_{ij} = 2\mu D_{ij}(\mathbf{v})}$ partie de $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}(\mathbf{v})$,

$\rightarrow$ **équation RANS exacte** $\boxed{\rho\left[\partial_t V_i + \partial_{x_j}(V_i V_j)\right] = -\partial_{x_i} P + \partial_{x_j}(2\mu S_{ij}(\mathbf{V})) + \partial_{x_j}(\tau_{ij})}$ $\qquad (V\text{eq})$

avec le **tenseur des contraintes de Reynolds** $\boxed{\tau_{ij} = -\rho\,\overline{u_i u_j} = -\rho \text{ covariance}(v_i v_j)}$

- **Hypothèse de viscosité turbulente :**
  « loi de comportement » des écoulements turbulents « isotropes » :

$$\boxed{\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} + 2\mu_t S_{ij}(\mathbf{V})}$$

avec μ_t **viscosité turbulente** dynamique, $\boxed{k = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}}$ = **énergie cinétique turbulente** (massique) $= 0$ à la paroi

1.1 Approche RANS : équation de V - Modèles à viscosité turbulente

- **Équation de Navier-Stokes**

$$\rho\left[\partial_t v_i \;+\; \partial_{x_j}(v_i v_j)\right] \;=\; -\partial_{x_i} p \;+\; \partial_{x_j}(\tau_{ij})$$

avec le **tenseur des contraintes visqueuses** $\boxed{\tau_{ij} \;=\; 2\mu D_{ij}(\mathbf{v})}$ partie de $\sigma_{ij} \;=-p\delta_{ij}+2\mu D_{ij}(\mathbf{v})$,

$\rightarrow$ **équation RANS exacte** $\boxed{\rho\left[\partial_t V_i \;+\; \partial_{x_j}(V_i V_j)\right] \;=\; -\partial_{x_i} P \;+\; \partial_{x_j}(2\mu S_{ij}(\mathbf{V})) \;+\; \partial_{x_j}(\tau_{ij})}$ $(V\text{eq})$

avec le **tenseur des contraintes de Reynolds** $\boxed{\tau_{ij} \;=-\rho\; \overline{u_i u_j} \;=-\rho\; \text{covariance}(v_i v_j)}$

- **Hypothèse de viscosité turbulente :**
« loi de comportement » des écoulements turbulents « isotropes » :

$$\boxed{\tau_{ij} \;=-\tfrac{2}{3}\rho k\delta_{ij} \;+\; 2\mu_t S_{ij}(\mathbf{V})}$$

avec μ_t **viscosité turbulente** dynamique, $\boxed{k=\frac{1}{2}\overline{u_i u_i}}$ = **énergie cinétique turbulente** (massique)= 0 à la paroi

$\rightarrow$ **équation RANS modèle** $\rho\left[\partial_t V_i \;+\; \partial_{x_j}(V_i V_j)\right] \;=\; -\partial_{x_i}\big(\; P \;+\; \underbrace{\tfrac{2}{3}\rho k}_{\substack{\textit{effet}\\ \textit{Bernoulli}\\ \textit{turbulent}}}\big) \;+\; 2\partial_{x_j}[(\;\mu \;+\; \underbrace{\mu_t}_{\substack{\textit{mélange}\\ \textit{ou transport}\\ \textit{turbulent}}}\;)\; D_{ij}(\mathbf{V})]$

1.2 Approche RANS : équation de k

- **Équation de k exacte :**

$$\partial_t k \; + \; V_j \partial_{x_j} k \; = \; \partial_{x_j}(\nu \; \partial_{x_j} k) \; - \; \partial_{x_j}\left(\frac{1}{\rho}\overline{p' u_j} \; + \; \frac{1}{2}\overline{u_i u_i u_j}\right) + (\partial_{x_j} V_i)\frac{\tau_{ij}}{\rho} - \epsilon \qquad \text{(keq)}$$

avec la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$, la **dissipation turbulente** $\boxed{\epsilon \; = \; \nu \; \overline{(\partial_{x_j} u_i)(\partial_{x_j} u_i)}}$.

1.2 Approche RANS : équation de k

- **Équation de k exacte :**

$$\partial_t k \;+\; V_j \partial_{x_j} k \;=\; \partial_{x_j}(\nu\, \partial_{x_j} k) \;-\; \partial_{x_j}\left(\frac{1}{\rho}\overline{p' u_j} \;+\; \frac{1}{2}\overline{u_i u_i u_j}\right) + (\partial_{x_j} V_i)\frac{\tau_{ij}}{\rho} - \epsilon \qquad (keq)$$

avec la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$, la **dissipation turbulente** $\boxed{\epsilon \;=\; \nu\; \overline{(\partial_{x_j} u_i)(\partial_{x_j} u_i)}}$.

- **Hypothèse de viscosité turbulente** $\rightarrow$ avant dernier terme de droite dans (keq) est **terme de production :**

$$P_k \;=\; (\partial_{x_j} V_i)\frac{\tau_{ij}}{\rho} \;=\; 2\nu_t S_{ij}(\mathbf{V}) S_{ij}(\mathbf{V}) \;>\; 0$$

avec $\nu_t = \mu_t/\rho =$ **viscosité turbulente cinématique**...

1.2 Approche RANS : équation de k

- **Équation de k exacte :**

$$\partial_t k \;+\; V_j \partial_{x_j} k \;=\; \partial_{x_j}(\nu\, \partial_{x_j} k) \;-\; \partial_{x_j}\left(\frac{1}{\rho}\overline{p' u_j} \;+\; \frac{1}{2}\overline{u_i u_i u_j}\right) + (\partial_{x_j} V_i)\frac{\tau_{ij}}{\rho} - \epsilon \qquad (keq)$$

avec la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$, la **dissipation turbulente** $\boxed{\epsilon \;=\; \nu\; \overline{(\partial_{x_j} u_i)(\partial_{x_j} u_i)}}$.

- **Hypothèse de viscosité turbulente** $\rightarrow$ avant dernier terme de droite dans (keq) est **terme de production :**

$$P_k \;=\; (\partial_{x_j} V_i)\frac{\tau_{ij}}{\rho} \;=\; 2\nu_t S_{ij}(\mathbf{V}) S_{ij}(\mathbf{V}) \;>\; 0$$

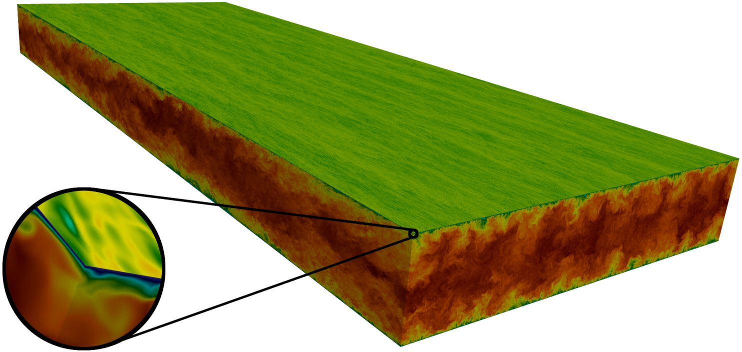
avec $\nu_t = \mu_t/\rho =$ **viscosité turbulente cinématique**...
aussi utilisée pour modéliser les couplages pression - vitesse et les moments d'ordre 3 dans (keq) :

$$-\partial_{x_j}\left(\frac{1}{\rho}\overline{p' u_j} \;+\; \frac{1}{2}\overline{u_i u_i u_j}\right) \;=\; \partial_{x_j}(\nu_t\, \partial_{x_j} k)$$

$\rightarrow$ **Équation modèle standard de k :** $\boxed{\partial_t k \;+\; V_j \partial_{x_j} k \;=\; \partial_{x_j}[(\nu + \nu_t)\partial_{x_j} k] \;+\; P_k \;-\; \epsilon}$. $\qquad (keq)$

1.2 Équation modèle standard de k testée sur les DNS en canal plan de Lee & Moser 2015

- Base ouverte sur le web : galerie et champs moyens sur https://turbulence.oden.utexas.edu
- 5 cas pour 5 valeurs du nombre de Reynods Re_τ basé sur la vitesse de frottement
- Visu du cas 5 à haut $Re_\tau = 5200$:



Conclusion

- Sur la science : ce contenu ressemble au début de séminaires que j'ai donnés au printemps 2022... Je ne mets pas tout sur le web, disons que c'est « confidentiel » ☹

- Sur LaTeX : à vous de jouer maintenant ☺