

École doctorale EMMA

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée
UMR CNRS 7563

Mémoire

présenté par

Emmanuel PLAUT

le 17 juin 2005

pour obtenir

l'habilitation à diriger des recherches

*« Sur les interactions entre petites et grandes échelles
dans divers systèmes dynamiques fluides »*

Composition du jury :

Patrick HUERRE	École Polytechnique & CNRS	Président-rapporteur
Étienne GUYON	Université Paris sud	Rapporteur
Dominique JAULT	Université Joseph Fourier & CNRS	Rapporteur
Friedrich H. BUSSE	Université de Bayreuth	Examinateur
Gérard BONHOMME	Université Henri Poincaré	Examinateur
Jean-Pierre BRANCHER	Institut National Polytechnique de Lorraine	Examinateur

Version courte sans annexes

Table des matières

Avertissement	1
Introduction	3
Citation et dédicace	11
1 Modes moyens créés par effets non linéaires	13
1.1 Mode de directeur en convections de cristaux liquides	13
1.1.1 Systèmes étudiés : convections... de cristaux liquides	13
1.1.2 Une étude expérimentale montrant des instabilités structurantes	19
1.1.3 Un mode (caché!) de directeur	22
1.2 Modes de vitesse et de pression en hydrodynamique	24
1.2.1 Systèmes étudiés : systèmes « hydrodynamiques » bidimensionnels	24
Convection annulaire tournante	24
Écoulements ouverts cisailés	28
1.2.2 Caractérisation de la structure primaire périodique : séparons module et phase!	29
1.2.3 Modes de vitesse et de pression moyens : une expression physique de la contrainte de Reynolds source	32
2 Action des modes moyens sur les modes de petite échelle	37
2.1 Mode de directeur : transition vers le bimodal varié	37
2.1.1 Le bimodal varié : une structure générique en convections des néma- tiques	37
2.1.2 Un modèle faiblement non linéaire - et une méthode systématique - pour analyser cette transition	38
2.2 Modes de vitesse : saturation - antisaturation	44
3 Quand les modes moyens développent leur propre dynamique...	51
3.1 Les structures bimodales deviennent oscillantes	52
3.1.1 Les bimodaux oscillants : des structures génériques en convections des nématiques	52
3.1.2 La faillite du modèle faiblement non linéaire	54
3.1.3 Un modèle faiblement non linéaire <i>étendu</i> pour expliquer ces oscillations .	54

3.2	Les rouleaux deviennent « <i>anormaux</i> »	58
3.2.1	Des rouleaux d'axe normal mais de champs « <i>anormaux</i> »	58
3.2.2	La faillite du modèle faiblement non linéaire	59
3.2.3	Des modèles plus ou moins fortement non linéaires	59
4	Couplages entre modes moyen, de grande et de petite échelle	61
4.1	Cas de modèles bidimensionnels du type de celui de Busse	63
4.1.1	Étude d'un modèle « général » et mise en évidence du mode global	63
4.1.2	Discussion	68
4.2	Cas de modèles tridimensionnels de convection tournante	68
4.2.1	Motivation de l'étude et présentation des modèles	68
4.2.2	Étude d'un modèle « général » et mise en évidence du mode global	70
4.2.3	Étude analytique de la limite des grands rapports d'aspect	76
4.2.4	Cas de « petits » rapports d'aspect	78
	Compléments d'information et perspectives	81
	Annexes biographiques	89
	A Curriculum Vitæ	91
	B Activités d'enseignement	93
B.1	Enseignements effectués à Orsay entre 1993 et 1996	93
B.2	Enseignements effectués à l'ENSEM depuis 1998	93
B.2.1	Responsabilité complète de modules	93
B.2.2	Participation à d'autres modules	94
B.3	Enseignements effectués à l'INPL depuis 2000	95
B.4	Enseignements effectués au niveau doctoral et post-doctoral	95
	C Activités d'encadrement	97
C.1	Co-encadrement d'un stage de DEA	97
C.2	Encadrement d'un stage de DEA	97
C.3	Co-encadrement d'une thèse	97
	D Responsabilités collectives	99
	E Activités de communication scientifique	101
E.1	Publications dans des revues à comité de lecture	101
E.2	Publication dans les actes d'un congrès international	102
E.3	Publications dans les actes de congrès nationaux	102
E.4	Communications orales dans des congrès internationaux	102
E.5	Communications orales dans des congrès nationaux	102
E.6	Séminaires	103

Table des matières du second fascicule

Annexes bibliographiques	105
F Article [4]	107
G Article [5]	125
H Article [6]	141
I Article [7]	145
J Article [10]	169
K Article [11]	189
L Article [12]	201
Références bibliographiques personnelles	217
Autres références bibliographiques	218

Avertissement

Ce mémoire vise à présenter de manière synthétique la démarche que j'ai suivie pour mener mes travaux de recherche, ainsi que quelques-uns des résultats les plus significatifs que j'ai obtenus. Ces travaux ont été effectués au Laboratoire de Physique des Solides d'Orsay dans l'équipe de Roland Ribotta durant ma thèse, à l'Institut de Physique de l'université de Bayreuth dans l'équipe de Werner Pesch et Lorenz Kramer durant mon post-doctorat, puis au Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA) à Nancy depuis que j'ai obtenu, en septembre 1998, un poste de maître de conférences à l'Institut National Polytechnique de Lorraine. On peut distinguer deux périodes dans ces activités de recherche. La première, qui court de septembre 1993, date du début de ma thèse, à juillet 1998, date de la fin de mon post-doctorat, a été consacrée à l'étude de **systèmes cristaux liquides** . Une *reconversion progressive* a été engagée à la toute fin de mon post-doctorat puis à mon arrivée à Nancy, puisque, afin de m'intégrer dans l'équipe « *dynamique des fluides* » de Jean-Pierre Brancher, j'ai alors décidé d'étudier plutôt des **systèmes fluides newtoniens** . De manière un peu caricaturale mais néanmoins significative, on pourrait dire que j'ai alors poursuivi l'étude de *fluides complexes dans des géométries simples* par celle de *fluides simples dans des géométries complexes*.

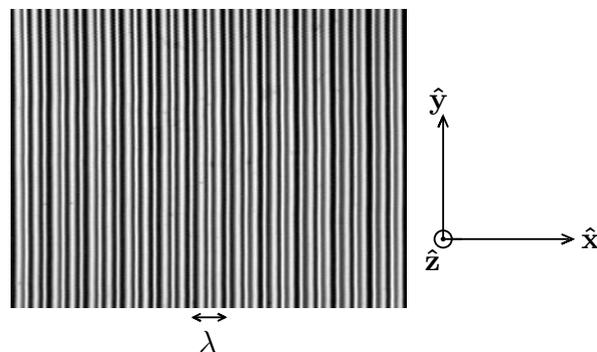
Cette reconversion, démarrée par une coopération avec Friedrich Busse et menée en parallèle avec un travail d'enseignant, a pris du temps. Il existe donc un léger déséquilibre entre les deux périodes suscitées, notamment au niveau de mes publications¹ listées page 217. Ainsi mes 9 premières publications concernent des systèmes cristaux liquides et seules les 3 dernières des systèmes fluides newtoniens. Il m'a semblé naturel de rétablir l'équilibre dans le corps du mémoire en étant relativement exhaustif en ce qui concerne mes travaux sur les systèmes fluides newtoniens, en allant même jusqu'à présenter quelques résultats non encore publiés, tout en ne décrivant, et ce de façon concise, qu'une partie de mes résultats sur les systèmes cristaux liquides. La lecture des articles reproduits dans les annexes bibliographiques rétablira sans doute la symétrie ainsi brisée.

L'adverbe « relativement » adossé à l'adjectif « exhaustif » signale une omission : j'ai choisi de ne pas présenter dans le corps de ce mémoire les premiers résultats que nous avons obtenus sur des **jets plans de fluides newtoniens** avec Salaheddine Skali-Lami, Jean-Pierre Brancher et divers jeunes chercheurs dont Mohammad Haghbin, doctorant que j'ai co-encadré et qui vient de soutenir sa thèse. En effet, aucune communication dans une revue à comité de lecture n'a encore été publiée sur ce sujet. Je reviendrai naturellement sur ce thème dans mon chapitre de compléments et perspectives.

¹Celles ci seront citées dans le corps de ce mémoire par des caractères gras entre crochets, de [1] à [12].

Introduction

Bon nombre de systèmes physiques peuvent être décrits en première approximation comme des *milieux continus fluides* qui présentent des effets d'advection ou de couplages *non linéaires*. En conséquence, ces systèmes, lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations extérieures, telles un chauffage, l'application de forces mécaniques, électriques ou magnétiques, évoluent vers des champs plus ou moins structurés, par exemple vers des *structures périodiques*¹,



ou, lorsque l'énergie injectée est suffisamment forte, vers un *désordre* très intense ou turbulence. Comme exemples d'applications, on peut citer l'affichage électronique lorsque le système fluide est un cristal liquide, l'énergétique lorsque le système fluide intervient dans un échangeur, etc... D'un point de vue fondamental, il importe de développer des méthodes permettant de *décrire*, de *prévoir* et d'*expliquer ces scénarios de structuration-déstructuration*.

Une première étape dans cette direction consiste à poser un *modèle* d'un tel système basé sur une bonne connaissance des mécanismes physiques qu'il met en jeu. Ce modèle prend en général la forme d'un système d'*équations aux dérivées partielles non linéaires couplées*.

On doit ensuite rechercher les solutions de ces équations modèles. Une résolution complètement numérique n'est pas forcément la panacée, car elle est souvent très lourde², et en la faisant en « aveugle » on risque fort de se perdre dans la « jungle » des solutions multiples du modèle. Il est donc préférable, lorsque cela est possible, d'utiliser plutôt des *méthodes de résolutions mixtes analytiques-numériques*, reposant en général sur une approche *perturbative*. Dans le cas où l'évolution du système est gouvernée par des *instabilités*, ces méthodes consistent en des

¹Comme ces rouleaux droits normaux en thermoconvection d'une couche de cristaux liquides, photographiés en lumière extraordinaire. Cette photographie tirée de ma thèse sera représentée figure 1.5. La vraie période λ de la structure est indiquée, et se déduit de l'interprétation des effets optiques à l'origine de cette image.

²Par exemple du fait de l'existence d'un grand nombre de paramètres de contrôle, caractéristique des systèmes complexes.

analyses linéaires et faiblement non linéaires de stabilité. Ces méthodes permettent de mettre en évidence des *scénarios génériques voire « universels »* en lien avec l'existence de symétries, plus précisément l'existence de **brisures de symétries**. Elles permettent aussi d'aboutir à des *modèles réduits* extrêmement simplifiés, soient des *équations d'amplitudes ou d'enveloppes* dites aussi, respectivement, *de Landau ou de Ginzburg-Landau*. Mes travaux de recherche ont justement consisté, pour une grande part, à développer de telles méthodes ainsi que des outils les plus systématiques possibles pour expliquer à partir de ces méthodes les scénarios mis en évidence.

Pour cela, je me suis focalisé sur le cas de systèmes invariants par translation dans une (ou deux) direction(s) x (ou y), et où il existe une **instabilité primaire structurante** menant à une structure périodique comme celle présentée sur la photographie de la page précédente. La **petite échelle** qui émerge ainsi est la *longueur d'onde* λ de cette structure; on peut aussi caractériser celle-ci par son *vecteur d'onde* $\mathbf{q} = q\hat{\mathbf{x}}$ avec $q = 2\pi/\lambda$ et $\hat{\mathbf{x}}$ le vecteur unitaire dans la direction de l'axe des coordonnées correspondantes x . Dans le régime linéaire (transitoire) où la petite amplitude A des modulations caractéristiques d'une telle structure commence à croître, un champ u quelconque est approximativement de la forme³

$$u(x, y, z, t) = u_0(z, t) + A(t) u_1(z) \exp(iqx) + A^*(t) u_1^*(z) \exp(-iqx) \quad (1)$$

où u_0 est la contribution de la *solution de base* qui est en train de perdre sa stabilité.

Un premier point important que je désire aborder est le fait que les *propriétés moyennes*⁴ de cette structure sont toujours *identiques à celles de la structure de base*, puisque, pour $q \neq 0$,

$$\langle \exp(iqx) \rangle_x = \langle \exp(iqx) \rangle_y = 0 .$$

Il peut en être autrement en régime non linéaire, lorsque A sera suffisamment « grande » pour que des effets d'ordre A^2 se fassent sentir. Génériquement, l'équation de la dynamique de u ,

$$D(\partial_t u) = L(u - u_0) + N_2(v, w) + t.o.s. \quad (2)$$

où D et L sont des opérateurs différentiels linéaires⁵, contient en effet des termes non linéaires quadratiques⁶ de la forme

$$N_2(v, w) = F(v) G(w) \quad (3)$$

où v et w sont deux champs locaux⁷ et F et G des opérateurs différentiels linéaires. Si l'on injecte dans ce terme non linéaire les expressions de la forme (1) des champs v et w on obtient dans $N_2(v, w)$

³La formule (1) est écrite dans le cas d'une instabilité primaire structurante **stationnaire**. Le cas d'une instabilité primaire structurante **oscillante** se décrit de façon similaire à condition de remplacer partout qx par $qx - \omega t$ où ω est la *pulsation* de la structure primaire. Dans un cas tridimensionnel plus général, il faut aussi remplacer qx par le produit scalaire $\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}$ où \mathbf{q} est le vecteur d'onde dans le plan xy et \mathbf{x} le vecteur position.

⁴Je note $\langle u \rangle_\xi$ la valeur moyenne d'un champ u par rapport à une coordonnée ξ .

⁵Il peut exister des termes de couplages linéaires entre champs, qui ne posent pas de problèmes à condition de raisonner en terme d'un vecteur d'état local regroupant tous les champs, cf. par exemple l'annexe B de [7].

⁶Il peut y avoir en fait *plusieurs termes différents* du type (3) dans (2), que l'on traitera par superposition, cf. la note numéro 9 du bas de la page suivante.

⁷L'un ou l'autre ou même les deux peuvent être le champ u lui-même.

- une contribution homogène en x et y ,

$$F(v_0) G(w_0) , \quad (4)$$

qui a typiquement été prise en compte dans le calcul de la solution de base à l'ordre A^0 ;

- des contributions linéaires ayant la période de la structure primaire

$$A (F(v_0) G(w_1 \exp(ix)) + F(v_1 \exp(ix)) G(w_0)) + c.c. ,$$

qui ont typiquement été prises en compte dans le calcul de cette structure primaire ;

- des contributions non linéaires harmoniques

$$A^2 F(v_1 \exp(ix)) G(w_1 \exp(ix)) + c.c. ,$$

qui décrivent (le début de) la *cascade d'énergie vers des échelles plus petites*, en l'occurrence $\lambda/2$;

- des contributions non linéaires homogènes en x et y nouvelles par rapport à (4),

$$|A|^2 (F(v_1 \exp(ix)) G(w_1^* \exp(-ix)) + c.c.) , \quad (5)$$

qui décrivent la *cascade d'énergie dite « inverse » vers des grandes échelles*, en l'occurrence une échelle infinie⁸.

Tout ceci de façon très classique et générale en non-linéaire, reposant tout simplement sur les identités que l'on peut qualifier de « géométriques »

$$\exp(ix) \exp(ix) = \exp(2ix) \quad \text{et} \quad \exp(ix) \exp(-ix) = 1 .$$

Les contributions *homogènes* (5) sont typiquement équilibrées par une *contribution non linéaire* nouvelle à u de la forme

$$|A|^2 u_2^H(z) \quad (6)$$

que l'on peut estimer par *élimination quasi statique* i.e. en négligeant dans (2) les variations temporelles lentes de A . On obtient ainsi⁹

$$u_2^H(z) = -L^{-1}(F(v_1 \exp(ix)) G(w_1^* \exp(-ix)) + c.c.) . \quad (7)$$

Ceci correspond à un *mode (secondaire esclave) d'échelle infinie*⁸ ou « *mode moyen* »¹⁰ modifiant les propriétés moyennes du système... à condition que le terme non linéaire source (5)

⁸En pratique, à l'exception des systèmes de topologie annulaire qui sont périodiques dans une direction donc « infinis » dans cette direction, tous les systèmes réels sont finis donc il faut, au moins formellement, remplacer l'amplitude A par une enveloppe $A(x)$ lentement variable qui s'annule aux bords (lointains) du système. L'échelle « infinie » est alors remplacée par la taille du système.

⁹Pour une présentation de cette technique d'élimination devenue classique en physique non linéaire on peut faire référence à l'ouvrage de Haken (1977). On comprend aussi au stade de l'équation (7) que l'on puisse traiter l'influence de *plusieurs* termes non linéaires dans (2) par *superposition*.

¹⁰Certains auteurs, par exemple Dewel et al. (1995), le désignent plutôt, à cause de la nullité de son vecteur d'onde, comme un « *mode zéro* ».

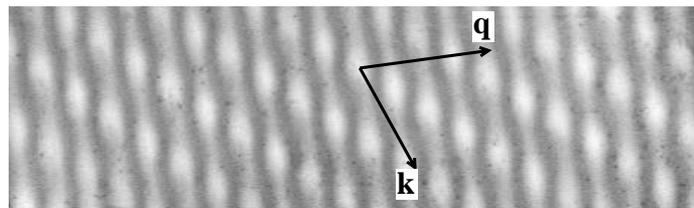
ne s'annule pas, c'est-à-dire que les opérateurs F et G et les fonctions v_1 et w_1 ne soient pas trop particulières! Une partie de mon travail, présentée chapitre 1 dans deux contextes différents, d'une part celui d'instabilités stationnaires de convections dans des systèmes cristaux liquides, d'autre part celui d'instabilités oscillantes dans des systèmes fluides newtoniens, a justement consisté à répondre aux questions :

- quand est-ce que le terme non linéaire (5) est non nul pour un système précis et un champ précis u ?
- peut on alors donner des critères d'interprétation physique permettant d'expliquer la forme du profil de ce terme en tant que fonction de la coordonnée transverse z ?

Autant des critères « simples » basés sur l'existence ou non de certaines *symétries* peuvent répondre à la première question, autant une analyse plus poussée est nécessaire pour répondre à la deuxième. Je montrerai ainsi comment et pourquoi, dans les systèmes cristaux liquides, un mode de rotation du *directeur* (la direction locale moyenne des molécules allongées) insoupçonné et insoupçonnable est créé par certaines structures périodiques. Je montrerai d'autre part que, dans de nombreux systèmes (thermo)hydrodynamiques, la *contrainte de Reynolds* responsable de la création d'écoulements moyens peut être comprise à partir d'une formule nouvelle qui fait intervenir l'*énergie cinétique moyenne* de l'écoulement périodique et la géométrie de ses *séparatrices* (lignes qui séparent deux « *cellules* » consécutives)¹¹.

§

Un mode moyen ainsi engendré par des modes primaires de petite échelle exerce en général une *rétroaction sur les modes primaires de petite échelle*. Une conséquence de cette action, dans le cas de convections de cristaux liquides, est la transition vers des *structures bimodales* que l'on peut décrire en première approximation¹² comme la superposition de deux modes de petites échelles, ainsi le *bimodal variqueux*¹³ :



Des structures de ce type étaient connues depuis longtemps en électroconvection de cristaux liquides (voir par exemple Kai et al. 1975 ou Bolomey & Dimitropoulos 1976), mais mal comprises. L'importance du mode moyen de directeur mis en évidence dans le chapitre 1 pour analyser cette

¹¹ Au passage je démontrerai l'existence d'un lien intéressant entre ces séparatrices et l'*argument de la fonction courant complexe* (l'équation 1.34), qui n'a, me semble t'il, jamais été noté.

¹² D'une part parce que le mode moyen impliqué est d'ordre supérieur, d'autre part parce que ce mode moyen ne « structure » pas le système!

¹³ Photographie en lumière ordinaire en thermoconvection de cristaux liquides. Elle est tirée de ma thèse et sera représentée section 2.1.1 ; en surimpression figurent les vecteurs d'ondes des modes de petites échelles impliqués.

transition sera démontrée dans le chapitre 2, qui introduira au passage une *méthode systématique d'analyse de mécanismes non linéaires*.

Un autre exemple de rétroaction d'un mode moyen sera évoqué dans la suite du chapitre 2, dans le contexte différent d'instabilités hydrodynamiques. Il concerne le caractère *sous-critique* de l'instabilité de Tollmien-Schlichting de l'écoulement de Poiseuille plan, connu sur la base de calculs numériques depuis les travaux de Reynolds & Potter (1967), et pour lequel je proposerai des éléments d'*explication physique*.

§

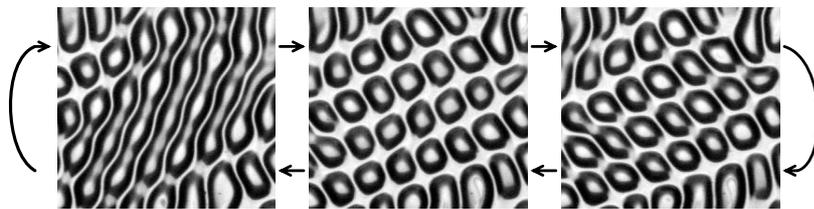
Les modes moyens décrits jusqu'à maintenant sont dynamiquement *passifs* : ils sont nourris bien gentiment par les modes primaires *actifs* - dont on dit justement qu'ils sont esclaves - sur lesquels il exercent « mécaniquement » leur rétroaction. Ainsi, dans le cas où par exemple deux modes primaires actifs d'amplitudes A et B sont en compétition, l'amplitude d'un mode moyen passif esclave est donnée par élimination quasi statique sous la forme

$$\varphi = c_a |A|^2 + c_b |B|^2 \quad (8)$$

où c_a et c_b sont des constantes données par un calcul faiblement non linéaire quadratique (cf. les équations 6 et 7). Bien entendu, lorsque l'on quitte le voisinage immédiat du seuil de l'instabilité primaire, on peut s'attendre à ce que l'élimination quasi statique ne soit plus une bonne approximation. Alors le mode moyen peut devenir actif, et on doit écrire (et calculer !) une équation d'amplitude pour φ , typiquement de la forme¹⁴

$$\partial_t \varphi = (\sigma_m - g_\varphi \varphi^2 + \Gamma_a |A|^2 + \Gamma_b |B|^2) \varphi + \gamma_a |A|^2 + \gamma_b |B|^2. \quad (9)$$

Ceci peut avoir des conséquences dramatiques, par exemple l'apparition d'*oscillations temporelles dans des structures bimodales*¹⁵ :



Je montrerai dans le chapitre 3 que ce phénomène est bien décrit par un système de trois équations d'amplitudes couplées pour les amplitudes A et B des deux modes de petite échelle impliqués et pour l'amplitude φ du mode moyen de directeur discuté dans le chapitre 2. J'en déduirai un *mécanisme physique* expliquant ces oscillations, observées dès 1976 par Bolomey

¹⁴Bien sûr c_a et c_b dans (8) se déduisent de σ_m , γ_a et γ_b dans (9) : $c_a = -\gamma_a/\sigma_m$ et $c_b = -\gamma_b/\sigma_m$.

¹⁵Ces trois photographies en lumière extraordinaire d'une couche thermoconvective de cristaux liquides, espacées chacune d'un intervalle de temps égal au quart de la période temporelle, sont tirées de [5], et seront représentées section 3.1.1.

& Dimitropoulos en électroconvection des nématiques, mais inexplicées jusqu'à la publication de [7].

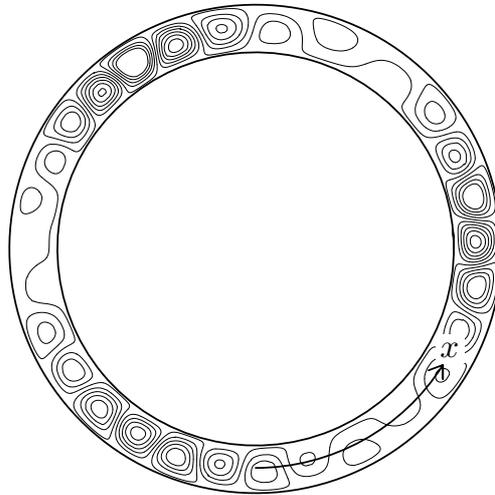
Un autre phénomène remarquable autorisé par une dynamique propre de modes moyens est le fait qu'un mode moyen non excité par des modes de petite échelle, i.e. pour lequel les termes sources quadratiques (5) s'annulent, peut néanmoins apparaître via une *instabilité secondaire* d'ordre supérieur de la structure de petite échelle. Ce scénario étonnant a donné lieu aux « *rouleaux anormaux* » en électroconvection, et je l'évoquerai à la fin du chapitre 3.

§

Une autre question que l'on peut naturellement se poser pour des systèmes présentant une instabilité primaire structurante est celle de la *compétition entre divers modes primaires de vecteurs d'ondes proches* ou de *nombres d'ondes proches* dans le cas d'un système *quasi unidimensionnel*. Le couplage entre deux tels modes primaires proches, de nombres d'ondes q et $q + k$ avec $k \ll q$, va créer en vertu de l'identité

$$\exp(-iqx) \exp[i(q+k)x] = \exp(ikx)$$

des *modes de grande échelle*. La compétition entre les modes primaires de petite échelle, ces modes de grande échelle et éventuellement un ou des modes moyens peut conduire par exemple à des *structures modulées* :



Cette figure montrant des lignes de courant instantanées¹⁶ résulte d'une simulation numérique d'une équation d'enveloppe ou de Ginzburg-Landau dans une géométrie annulaire avec un petit inter-rayon. Ainsi l'anneau peut être déplié en une bande plane avec des conditions limites périodiques : la coordonnée « principale » ou « de structuration » x est l'abscisse curviligne mesurée le long du périmètre moyen de l'anneau. Un point important, qui avait échappé par exemple à Hecke & Saarloos (1997), est que *l'équation de Ginzburg-Landau standard*

$$\tau(\partial_t A + v_g \partial_x A) = (1 + ic_0)\epsilon A + \xi^2(1 + ic_1)\partial_x^2 A - \gamma(1 + ic_3)|A|^2 A \quad (10)$$

¹⁶Qui sera représentée page 63.

pour l'enveloppe $A(x, t)$ des modes primaires (ici *oscillants*) ***n'est généralement pas valable dans un système hydrodynamique de géométrie annulaire***, à cause de la contrainte de périodicité de la pression qui s'impose au mode moyen de vitesse, mais n'a par contre aucune influence sur des modes de grande échelle de vitesse. En conséquence la limite, pour les modes de vitesse, des nombres d'ondes tendant vers 0 est *singulière*, et il faut remplacer (10) par l'équation de Ginzburg-Landau ***non locale***

$$\tau(\partial_t A + v_g \partial_x A) = (1 + ic_0)\epsilon A + \xi^2(1 + ic_1)\partial_x^2 A - \gamma(1 + ic_3)|A|^2 A - \delta(1 + id_3)\langle |A|^2 \rangle_x A. \quad (11)$$

Dans le chapitre 4, j'expliquerai l'origine de cet effet « *topologique* » et sa pertinence, d'une part pour des modèles simplifiés bidimensionnels de convection dans des noyaux planétaires (correspondants à la figure numérique ci-dessus), d'autre part pour un problème de convection tournante, cette fois-ci complètement tridimensionnel.

§

Je terminerai naturellement par un chapitre de compléments et de perspectives.

Fundatur geometria in praxi mechanica.

Isaac Newton.

Pour Raphaëlle,
Augustin,
Benoît,
Grégoire
et Martin ;
pour ma famille et ma belle-famille ;
pour tous mes collègues proches et lointains,
plus particulièrement Werner.

In memoriam Lorenz Kramer ;

requiescat in pace.

Chapitre 1

Modes moyens créés par effets non linéaires

Les effets non linéaires les plus « simples » que l'on puisse imaginer en dynamique de systèmes étendus consistent sans doute en la création par un mode primaire de petite échelle, typiquement en $\exp(\pm iqx)$, d'un mode moyen i.e. indépendant de x , via l'influence de termes non linéaires quadratiques en vertu de l'identité

$$A \exp(iqx) A^* \exp(-iqx) = |A|^2 . \quad (1.1)$$

Malgré cette simplicité conceptuelle, l'interprétation physique fine de tels effets est non triviale, car il se cache typiquement dans (1.1) des facteurs dépendants de la coordonnée « transverse » beaucoup plus compliqués que de simples exponentielles...

L'étude de tels effets va être menée dans le cadre de deux familles de systèmes, d'une part, section 1.1, les convections de cristaux liquides, systèmes tridimensionnels¹, d'autre part, section 1.2, des systèmes (thermo)hydrodynamiques bidimensionnels².

1.1 Mode de directeur en convections de cristaux liquides

1.1.1 Systèmes étudiés : convections... de cristaux liquides

La *thermoconvection de Rayleigh-Bénard*, qui s'obtient lorsqu'une couche plane horizontale de fluide newtonien est suffisamment chauffée par le bas, constitue un archétype de système présentant des scénarios de structuration-déstructuration spatio-temporelle. Cette position privilégiée se justifie d'une part par l'importance pratique des phénomènes de convection que ce soit en énergétique, en météorologie, en géophysique, etc... d'autre part par le fait que ce système permet des expériences très bien contrôlées. Ainsi, depuis qu'il fut « inventé » au tout début du XX^{ème} siècle, ce système a été extrêmement étudié, et s'est avéré extrêmement riche. Il a permis par exemple la mise en évidence de scénarios d'*instabilités en cascade* et la mise au point des méthodes d'analyse correspondantes (pour une présentation récente on peut consulter Busse 2003). Une propriété importante de ce système est son *isotropie* dans le plan horizontal, qui fait que le vecteur d'onde des modes amplifiés par l'instabilité primaire structurante stationnaire, dits « rouleaux de convection », est a priori d'orientation quelconque dans ce plan horizontal.

¹En conséquence la coordonnée transverse sera z .

²En conséquence la coordonnée transverse sera y .

Ceci permet par exemple l'existence, lorsque les bords « lointains » du récipient sont circulaires, de structures en forme de « cibles » avec des rouleaux circulaires concentriques, ou encore des scénarios spectaculaires de transition à la turbulence basés sur la compétition de structures en spirale, lors de laquelle toutes les orientations possibles de rouleaux sont, en un même point de l'espace, successivement réalisées (Bodenschatz et al. 2000).

D'un point de vue fondamental, il est naturel de se poser la question du devenir de ces scénarios de structuration-déstructuration dans des systèmes thermoconvectifs *anisotropes*, c'est-à-dire dans des systèmes possédant des propriétés de symétrie différentes. De tels systèmes peuvent par exemple être obtenus en conservant la géométrie plane de l'expérience de Rayleigh-Bénard mais en utilisant au lieu d'un fluide newtonien un fluide non newtonien anisotrope, un *crystal liquide nématique*. Un tel fluide est constitué de molécules allongées qui présentent un *ordre orientationnel*³. On peut donc définir la direction moyenne locale d'orientation de ces molécules, le vecteur *directeur* \mathbf{n} ; sur la vue d'artiste qui suit on a pris l'exemple du 5CB, qui présente une phase nématique entre 25 et 35.2°C :



Localement on a symétrie de rotation autour de \mathbf{n} et symétrie par rapport à un plan orthogonal à \mathbf{n} ($\mathbf{n} \Leftrightarrow -\mathbf{n}$); on a donc un milieu *anisotrope uniaxe* d'axe \mathbf{n} . Le caractère fluide provient lui de l'absence d'ordre positionnel des molécules.

L'anisotropie du système peut alors être assurée par un traitement physico-chimique adéquat des plaques qui confinent la couche du nématique, de sorte que l'on y ait la condition d'*ancrage planaire*

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{x}} \quad \text{en} \quad z = \pm h . \quad (1.2)$$

Comme le champ de directeur tend naturellement à être homogène, i.e. toute distorsion de celui-ci coûte une certaine *énergie d'élasticité d'orientation* qui donne typiquement lieu à des *couples élastiques* de rappel, dans la configuration de base, conductive et statique, du système, on a en conséquence

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{x}} \quad (1.3)$$

dans tout le volume de la couche.

Il s'avère que le mécanisme classique de thermoconvection de Rayleigh-Bénard, dans lequel une modulation de température amplifie une modulation de vitesse verticale, existe toujours dans une telle couche nématique (représentée figure 1.1), mais en parallèle avec un mécanisme de *thermoconvection spécifiquement anisotrope* que l'on peut expliquer en trois étapes. Pour cela considérons un mode primaire typique de petite échelle du champ de directeur de la forme

$$\delta \mathbf{n} = n_z \hat{\mathbf{z}} \quad \text{avec} \quad n_z(x, z) = A f_{nz}(z) \cos(qx) , \quad (1.4)$$

A étant une petite amplitude et $f_{nz}(z) \simeq \cos[\pi z/(2h)]$ une fonction paire dont la forme précise ne peut être connue que numériquement.

³Un ouvrage de référence récent sur les cristaux liquides est celui de Oswald & Pieranski (2000). Je passerai sous silence les phases nématiques formées de molécules en forme de disques, i.e. dans ce mémoire « nématique » signifie « nématique formé de molécules allongées ».

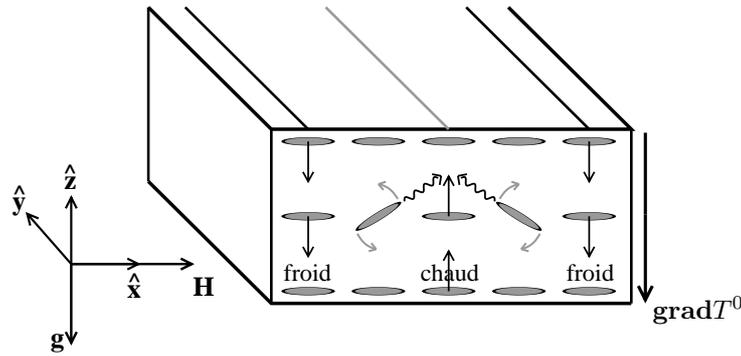


Fig. 1.1 – Principe de la *thermoconvection d'une couche de cristal liquide nématique planaire*. Le vecteur \mathbf{g} est l'accélération de la pesanteur. Deux plaques planes horizontales isothermes situées en $z = \pm h$ imposent un gradient de température moyen $\text{grad}T^0 = -\delta T/(2h)\hat{\mathbf{z}}$. Un mode de directeur de la forme (1.4) amplifié par conduction anisotrope de la chaleur (flèches ondulées) un mode de température (1.5). Par poussée d'Archimède ce mode crée le mode de vitesse (1.6) (flèches droites). Les couples visqueux résultants (flèches courbes grises) amplifient le mode de directeur initial. Le vecteur \mathbf{H} parallèle à la direction d'ancrage $\hat{\mathbf{x}}$ indique un champ magnétique éventuel.

1. Dans le nématique, la *conduction de la chaleur* est anisotrope et plus grande dans la direction du directeur. En conséquence la chaleur injectée à la paroi inférieure de la couche est conduite préférentiellement vers la région indiquée comme « chaude » sur la figure 1.1, i.e. elle amplifie une modulation de température de la forme

$$\theta(x, z) = A f_\theta(z) \sin(qx) \quad (1.5)$$

où f_θ est une fonction de forme semblable à f_{nz} .

2. De manière classique cette modulation de température crée des *forces de poussée d'Archimède* qui amplifient un mode de vitesse verticale de la forme

$$w(x, z) = A f_w(z) \sin(qx) \quad (1.6)$$

comme celui représenté figure 1.1.

3. Enfin un tel mode de vitesse crée des *couples visqueux* qui tendent à faire tourner le directeur dans le cœur des rouleaux de convections, là où il existe un gradient de vitesse dans la direction du directeur (figure 1.1). Ces couples amplifient le mode de directeur initial (1.4).

Ce mécanisme dit de *focalisation de la chaleur*, qui a été décrit par l'équipe de de Gennes à Orsay, cf. Dubois-Violette (1971), favorise très nettement des rouleaux de vecteur d'onde \mathbf{q} colinéaire à la direction d'ancrage $\hat{\mathbf{x}}$, ou encore d'axe normal à cette direction⁴; on les appelle pour cette raison « *rouleaux normaux* ». De tels rouleaux ont effectivement été mis en évidence expérimentalement par Guyon & Pieranski (1972). Après cette expérience pionnière⁵ il fallu attendre Berge et al. (1993) pour que des progrès décisifs soient faits dans la connaissance

⁴Comme ceux que l'on a étudié et représenté ci-dessus!

⁵Qui fut suivie, dans l'équipe d'Orsay, par l'étude de quelques variantes de ce système, par exemple lorsque l'on incline la couche par rapport à l'horizontale (Guyon et al. 1978).

de ce système. En effet, sur une suggestion du groupe de Bayreuth, qui venait de publier un article entièrement théorique sur ce sujet (Feng et al. 1992), l'équipe de Santa Barbara décida de mener des expériences en présence d'un champ magnétique $\mathbf{H} = H\hat{\mathbf{x}}$ parallèle à la direction d'ancrage. Un tel champ crée des *couples magnétiques* de rappel sur le directeur et a donc un effet stabilisant. On s'attend donc à ce que le mécanisme de focalisation de la chaleur soit progressivement supprimé par le champ magnétique, et c'est ce qui fut effectivement observé par Berge et al. (1993), en accord avec les calculs théoriques de Feng et al. (1992). Pour donner une idée de l'efficacité du mécanisme de focalisation de la chaleur, on peut mentionner qu'entre les cas $H = 0$ où ce mécanisme opère et $H \rightarrow +\infty$ où ce mécanisme est complètement gelé, i.e. la convection se fait en l'absence de toute distorsion du champ de directeur, la valeur du seuil de convection δT_c est multipliée par un facteur de l'ordre de 800 (voir par exemple [4]). Avant de poursuivre cette introduction, précisons que Berge et al. (1993) n'ont fait des expériences que dans le régime où H est plusieurs fois supérieur à une valeur H_F caractéristique de la couche nématique utilisée, appelée « champ de Frederiks », et correspondant à l'équilibre entre un couple élastique typique et un couple magnétique typique. En d'autres termes ils n'ont fait des expériences qu'en présence de couples magnétiques relativement forts et donc, à mon arrivée en thèse, les seules expériences existants dans le régime « naturel » sans champ magnétique étaient celles de Guyon & Pieranski (1972), qui ne se sont intéressées qu'aux propriétés critiques, i.e. linéaires, du système.

Historiquement, la thermoconvection d'une couche de nématique a été beaucoup moins étudiée qu'un système « frère », apparu plus tôt, à savoir l'*électroconvection d'une couche de nématique*. En effet un nématique soumis à un champ électrique \mathbf{E} subit des *couples électriques* qui peuvent éventuellement tendre à aligner \mathbf{n} parallèlement à \mathbf{E} , et il a été assez vite réalisé que ceci pouvait servir à créer des « polariseurs » contrôlables par l'application de faibles champs électriques, c'est-à-dire des afficheurs. De nombreuses études ont donc été lancées dans les années 1960 dans différentes géométries et avec différents matériaux, et c'est dans le cadre de ces études que Williams (1963) a découvert une instabilité structurante dans une couche de nématique enserrée entre deux électrodes, c'est-à-dire soumise à un champ électrique transverse. Peu après, Heilmeyer et al. (1968) ont justement proposé d'utiliser cette instabilité lorsqu'elle se développe en un état turbulent à champ électrique appliqué fort pour créer des afficheurs. La compréhension de ces phénomènes s'est progressivement développée, notamment grâce aux travaux de Helfrich (1969), qui a clarifié un certain nombre de points. Par exemple, la tendance à un alignement de \mathbf{n} sur \mathbf{E} à cause des couples électriques n'existe que dans des matériaux nématiques qui possèdent une anisotropie de permittivité diélectrique, i.e. une différence entre la permittivité parallèlement à \mathbf{n} et perpendiculairement à \mathbf{n} , positive; dans le cas d'une anisotropie de permittivité diélectrique négative, les couples électriques favorisent au contraire des configurations où \mathbf{n} est perpendiculaire à \mathbf{E} . Le paradoxe soulevé par les expériences du type de celle de Williams (1963) est qu'elles impliquent des nématiques à anisotropie diélectrique négative dans des configurations planaires

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{x}} \perp \mathbf{E} \quad (1.7)$$

qui sont donc stabilisées par les couples électriques. La solution proposée par Helfrich (1969) repose sur un mécanisme de *focalisation des charges* ioniques présentes en faible quantité

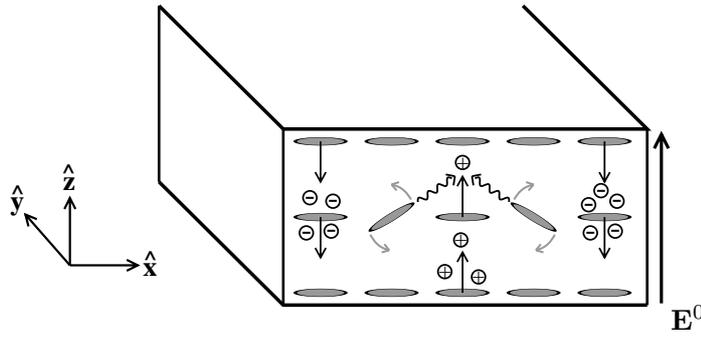


Fig. 1.2 – Principe de l'électroconvection d'une couche de cristal liquide nématique planaire. Deux électrodes transparentes situées en $z = \pm h$ imposent un champ électrique moyen \mathbf{E}^0 alternatif. Un mode de directeur de la forme (1.4) crée par conduction anisotrope des charges (flèches ondulées) une densité de charge non nulle (1.8). Les forces de Coulomb qui s'ensuivent créent le mode de vitesse (1.6) (flèches droites). Les couples visqueux résultants (flèches courbes) amplifient le mode de directeur initial.

dans le nématique, que l'on peut expliquer en trois temps. Pour cela on considère encore, au départ, un mode de directeur de la forme

$$\delta \mathbf{n} = n_z \hat{\mathbf{z}} \quad \text{avec} \quad n_z(x, z) = A f_{n_z}(z) \cos(qx) . \quad (1.4)$$

1. Par *conduction anisotrope des charges*, plus grande dans la direction du directeur que perpendiculairement, lorsque le champ \mathbf{E}^0 , typiquement alternatif, pointe vers le haut, on va conduire préférentiellement les charges positives dans la région rouge de la figure 1.2, et les charges négatives dans les régions bleues, i.e. créer une densité de charge de la forme

$$\rho_e(x, z) = A f_{\rho_e}(z) \sin(qx) . \quad (1.8)$$

2. Cette distribution de charges crée des *forces de Coulomb* qui entraînent le fluide, i.e. amplifient un mode de vitesse de la forme

$$w(x, z) = A f_w(z) \sin(qx) \quad (1.6)$$

comme celui représenté figure 1.2.

3. Enfin un tel mode de vitesse crée des *couples visqueux* qui tendent à amplifier le mode de directeur initial (1.4).

Un point important est que, durant la demi-période temporelle suivante, lorsque le champ \mathbf{E}^0 pointe vers la bas, la distribution de charge est typiquement inversée par rapport à (1.8), i.e.

$$\rho_e(x, z) = -A f_{\rho_e}(z) \sin(qx) , \quad (1.9)$$

ce qui conduit aux mêmes forces de Coulomb. En d'autres termes le mode de densité de charge réel est *oscillant* et donné par

$$\rho_e(x, z, t) = A f_{\rho_e}(z) \sin(qx) \cos(\omega t) \quad (1.10)$$

lorsque le champ électrique imposé est⁶

$$\mathbf{E}^0 = E \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}} . \quad (1.11)$$

⁶Une perturbation de champ électrique d'ordre A est naturellement introduite par l'électroconvection.

Ce mécanisme d'électroconvection, décrit par Helfrich (1969) puis de façon plus précise et quantitative par Dubois-Violette et al. (1971), est donc intrinsèquement *instationnaire*, et en ce sens bien différent du mécanisme de thermoconvection. Cependant ces deux systèmes possèdent les *mêmes symétries*, et mènent typiquement à des champs de directeur (1.4) et de vitesse (1.6) semblables, donc on peut s'attendre à ce qu'ils présentent des scénarios de structuration-déstructuration similaires. L'un des avantages du système électroconvectif est la possibilité de réaliser des expériences dans des couches très minces (dans l'équipe de Roland Ribotta, Ahmed Belaidi a été jusqu'à réaliser des couches de seulement 5 micromètres d'épaisseur, cf. par exemple [6]) dans lesquelles les temps d'évolution caractéristiques sont très brefs (pour une couche de 5 micromètres, de l'ordre du centième de seconde) et donc les expériences peuvent être menées rapidement et de façon exhaustive. Un inconvénient de l'électroconvection est le fait qu'il est difficile de contrôler la quantité d'ions et donc les conductivités électriques, qui présentent d'ailleurs des phénomènes d'évolution lente, sur des temps de l'ordre du jour. D'autre part, l'idée d'une séparation des charges instantanée à partir de « réserves d'ions » immédiatement disponibles est, on s'en doute, un peu grossière, i.e. des effets électrochimiques existent et peuvent s'avérer importants (cf. par exemple Dennin et al. 1996). En résumé l'électroconvection est plutôt plus facile à étudier expérimentalement que la thermoconvection, mais par contre sa description théorique est plus compliquée.

C'est par l'étude expérimentale détaillée de l'électroconvection que l'équipe de Roland Ribotta s'est faite connaître pendant les années 1980. L'un des apports de cette équipe fut de montrer que des rouleaux normaux (ceux montrés figure 1.2, qui ont été les seuls à être étudiés théoriquement par Dubois-Violette et al. 1971) ne sont pas toujours préférés au seuil d'électroconvection, mais qu'à basse fréquence $f = \omega/(2\pi)$ des « *rouleaux obliques* », de vecteur d'onde faisant un angle non nul avec la direction d'ancrage $\hat{\mathbf{x}}$, sont au contraire choisis par le système (Ribotta et al. 1986). Ainsi la symétrie $S : y \mapsto -y$ est brisée, et en conséquence deux variants de cette structure existent comme montré figure 1.3; ces deux variants de vecteurs d'ondes $\mathbf{q} = q_x \hat{\mathbf{x}} + q_y \hat{\mathbf{y}}$ et $S(\mathbf{q}) = q_x \hat{\mathbf{x}} - q_y \hat{\mathbf{y}}$ avec q_x et $q_y > 0$ sont traditionnellement nommés « *zigs* » et « *zags* ». Ribotta et al. (1986) ont aussi montré que ces « zig-zags » apparaissent à fréquence intermédiaire via une *instabilité secondaire* des rouleaux normaux alors préférés au seuil, appelée *instabilité « ondulations-zig-zags »* à cause de l'existence d'un état intermédiaire de *rouleaux ondulés*. Ces résultats nouveaux ont motivé le groupe de Bayreuth, constitué de Lorenz Kramer, Werner Pesch et collaborateurs, pour se lancer dans l'étude théorique de ces phénomènes. Un modèle tridimensionnel reproduisant la préférence pour des rouleaux obliques à basse fréquence fut ainsi proposé par Zimmermann & Kramer (1985) puis Bodenschatz et al. (1988); par contre il fallu attendre Kaiser & Pesch (1993) pour qu'un modèle de l'instabilité secondaire ondulations-zig-zags soit proposé. Ce modèle, qui implique des écoulements de grande échelle, n'est cependant pas complètement satisfaisant puisqu'il prévoit des seuils d'instabilité secondaire ondulations-zig-zags trop élevés⁷. Alors que les théoriciens de Bayreuth rencontraient donc quelques difficultés, l'équipe de Roland Ribotta continuait à

⁷Cf. la figure 3 de Kaiser & Pesch (1993), qui montre par exemple que, pour le nématique MBBA à fréquence intermédiaire, leur modèle ne prévoit pas d'instabilité secondaire si l'on prend pour l'anisotropie de conductivité électrique réduite $\sigma_a = \sigma_{\parallel}/\sigma_{\perp} - 1$, σ_{\parallel} (resp. σ_{\perp}) étant la conductivité parallèlement (resp. perpendiculairement) au directeur, une valeur réaliste de l'ordre de 0.5 (utilisée par exemple dans Bodenschatz et al. 1988).

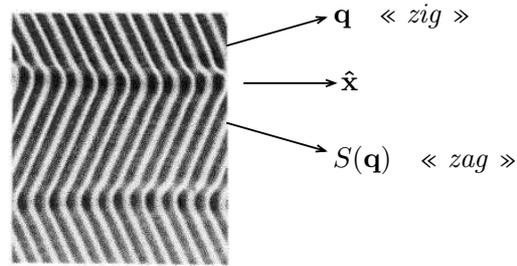


Fig. 1.3 – Structure de *rouleaux obliques* ou « zig-zags » en électroconvection planaire photographiée par Ribotta et al. (1986) en lumière extraordinaire. À droite on a rappelé la direction d’ancrage \hat{x} et fait figurer les vecteurs d’ondes des deux variants de cette structure.

accumuler des résultats expérimentaux, établissant ainsi un premier *diagramme de structures spatio-temporelles* pour l’électroconvection, qui fut publié dans Joets & Ribotta (1986). Ce diagramme mettait notamment l’accent sur l’existence et la caractérisation de structures *bimodales* que j’ai déjà évoquées dans mon introduction, et sur lesquelles je reviendrai dans le chapitre 2. En parallèle, d’autres équipes concurrentes s’intéressaient à l’électroconvection des nématiques, avec des contributions notables comme celle de Rehberg et al. (1989) par exemple.

C’est dans ce contexte dynamique que je suis arrivé en thèse en septembre 1993 dans l’équipe de Roland Ribotta. Avant de présenter une synthèse de mes résultats expérimentaux, il convient, pour achever la mise en perspective historique, de signaler que, du point de vue des applications à l’affichage, les systèmes électroconvectifs, pourtant performants comme l’avaient montré Heilmeyer et al. (1968), ont été définitivement distancés dans les années 1970-80 par l’invention des afficheurs nématiques en torsion et sur-torsion, qui se sont révélés encore plus performants, cf. Schadt & Helfrich (1971) puis Berreman & Heffner (1981). Ces afficheurs sont basés sur des instabilités *homogènes* du champ de directeur sous l’effet d’un champ électrique vertical, dans une géométrie qui présente donc des similarités avec celle des systèmes électroconvectifs... mais dans laquelle on veut à tout prix éviter une instabilité *structurante* qui aurait pour effet de détériorer l’apparence de l’afficheur. Les études que je vais présenter ont donc, du point de vue méthodologique, une petite pertinence en ce qui concerne les applications des nématiques à l’affichage⁸.

1.1.2 Une étude expérimentale montrant des instabilités structurantes

Mon arrivée en thèse dans l’équipe de Roland Ribotta a coïncidé avec celle d’Ahmed Belaidi, avec qui j’ai commencé par mener des études en électroconvection concernant la dynamique de défauts localisés créant une turbulence faible, de façon à compléter les études de Rehberg et al. (1989). Après quelques mois, il fut décidé que j’allai me consacrer à l’étude systématique de la *thermoconvection en géométrie étendue et à champ magnétique parallèle nul ou faible*. J’ai donc monté de nouvelles expériences, dont le principe est présenté figure 1.4. Afin de les analyser, j’ai développé en coopération avec Alain Joets de nouvelles méthodes

⁸Plus précisément, la problématique de la compétition entre modes moyens et périodiques dans des systèmes proches des afficheurs nématiques actuels est présentée par exemple dans Winkler et al. (1991).

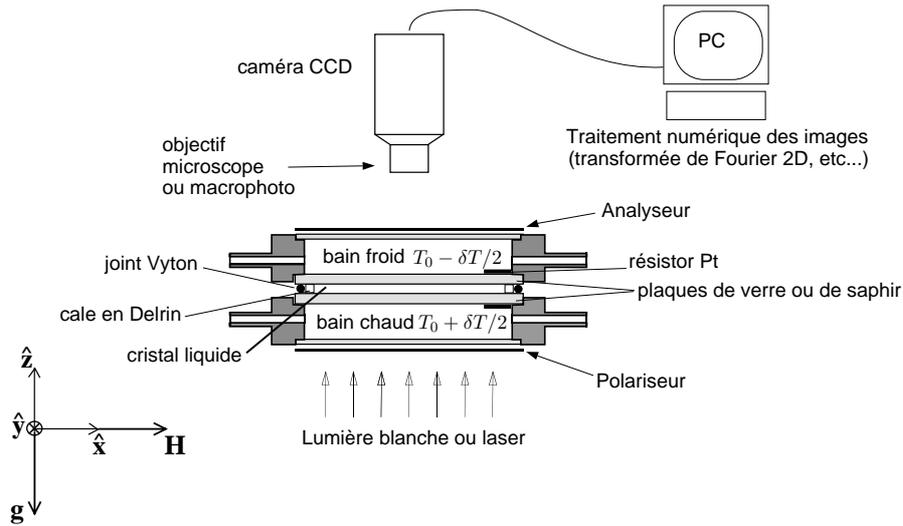


Fig. 1.4 – *Montage expérimental* utilisé pour l'étude de la thermoconvection planaire. La cellule remplie de cristal liquide est un disque plein de diamètre utile de l'ordre de 9 cm et d'épaisseur environ 1.3 mm. Pour plus de détails voir [5].

optiques, à la fois en lumière transmise *extraordinaire*, i.e. polarisée suivant \hat{x} , ce qui crée des *caustiques*, et en lumière transmise *ordinaire*, i.e. polarisée suivant \hat{y} , ce qui crée des effets de *diffusion anisotrope* [1]. Une première *cascade de structures spatio-temporelles* a ainsi été mise en évidence [2]. Ces travaux expérimentaux ont été complétés avec Luc Pastur, arrivé en thèse deux ans après moi, et une synthèse a été présentée dans [5]. C'est de cet article, reproduit en annexe G, qu'est tirée la figure 1.5, sur laquelle nous avons naturellement fait figurer le paramètre d'écart au seuil réduit

$$\epsilon = \frac{\delta T}{\delta T_c} - 1, \quad (1.12)$$

δT_c étant le seuil de convection. Je vais commenter progressivement, au fil de ce mémoire, cette figure 1.5. Avant cela on peut immédiatement remarquer la similarité entre ce diagramme de structures et celui obtenu en électroconvection à fréquence faible (voir Joets & Ribotta 1986 et plus récemment Fünfschilling et al. 2003), alors que les mécanismes physiques à l'origine de la convection sont très différents : le fait que les propriétés de symétries de ces systèmes soient les mêmes et que des mécanismes de focalisation anisotrope jouent dans les deux cas explique cette similitude frappante.

Pour ce qui nous intéresse ici, un premier point nouveau par rapport à ce qui était connu grâce aux travaux de Guyon & Pieranski (1972) est l'existence de *rouleaux obliques* très près du seuil, au delà de la courbe $\epsilon \simeq \epsilon_{ZZ}$ figure 1.5. Comme ϵ_{ZZ} est très petit, de l'ordre de 0.1 [2], ceci signifie qu'au seuil même de convection des rouleaux obliques peuvent apparaître et ne relaxeront que très lentement vers les rouleaux normaux qui sont légèrement préférés, cf. la figure 5 et la section 3 de [5]. En première approximation, on peut donc considérer que les rouleaux obliques obtenus pour $\epsilon \gtrsim \epsilon_{ZZ}$ sont une structure *faiblement non linéaire*, ce qui ouvre la porte à une étude théorique simple de ceux-ci, sur la base du schéma présenté dans l'introduction.

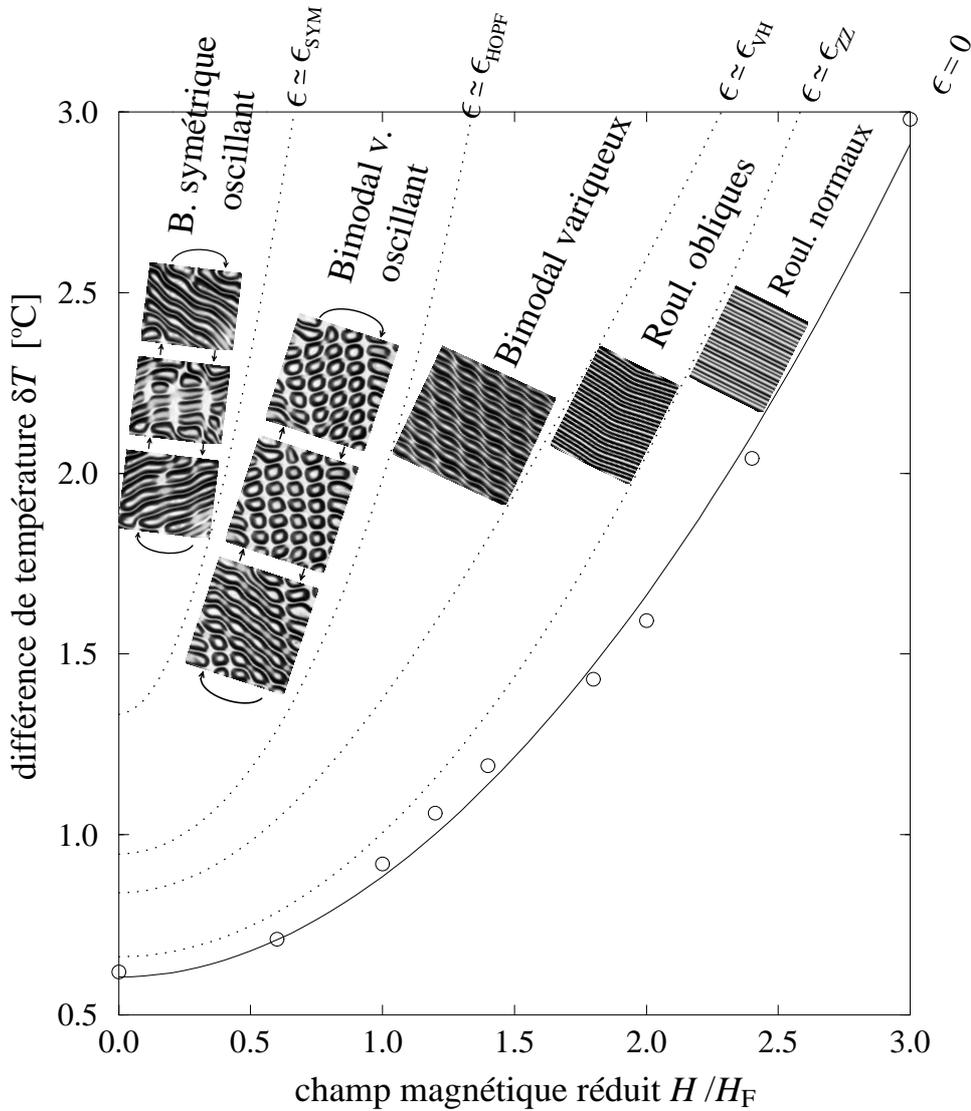


Fig. 1.5 – Diagramme des *structures spatio-temporelles* mises en évidence expérimentalement en thermoconvection du nématique MBBA [5]. Quelques points correspondant à la mesure du seuil de convection δT_c sont indiqués par les cercles. Entre $\epsilon = 0$ et $\epsilon \simeq \epsilon_{OZZ}$, courbe non représentée qui se trouve juste au dessous de la courbe $\epsilon \simeq \epsilon_{ZZ}$, le système relaxe vers des *rouleaux normaux*. Entre $\epsilon \simeq \epsilon_{OZZ}$ et $\epsilon \simeq \epsilon_{ZZ}$, une instabilité ondulations-zig-zags se développe, qui sature sur des structures de rouleaux ondulés. Entre $\epsilon \simeq \epsilon_{ZZ}$ et $\epsilon \simeq \epsilon_{VH}$, des *rouleaux obliques* sont préférés. À $\epsilon \simeq \epsilon_{VH}$, une transition vers le *bimodal variqueux stationnaire* a lieu. À $\epsilon \simeq \epsilon_{HOPF}$, ce bimodal variqueux devient *oscillant*. Une évolution des vecteurs d'ondes de base de cette structure a lieu lorsque δT augmente, de sorte qu'au delà de $\epsilon \simeq \epsilon_{SYM}$ on a un *bimodal symétrique oscillant*. Toutes les photographies présentées ont été prises en lumière extraordinaire et présentent donc des caustiques.

1.1.3 Un mode (caché!) de directeur

J'ai mené durant ma thèse une étude linéaire puis faiblement non linéaire des équations de la *thermonématohydrodynamique* qui modélisent la thermoconvection des nématiques. Elles sont composées de deux équations pour la dynamique des champs n_y et n_z , soient les composantes non strictement planaires du champ de directeur, de l'équation de la chaleur pour la température réduite θ , et de l'équation de la vitesse, voir par exemple [4] ou [7]. On peut noter que l'élimination de la composante n_x du directeur suivant

$$n_x = \sqrt{1 - (n_y^2 + n_z^2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-2)!}{2^{2m-1}(m-1)!m!} (n_y^2 + n_z^2)^m \quad (1.13)$$

assure l'existence d'une infinité de termes non linéaires d'origine « géométrique » dans ces équations. Elles font intervenir onze paramètres dépendant du matériau, à savoir trois constantes d'élasticité d'orientation, deux diffusivités de la chaleur, cinq viscosités et un coefficient de dilatation thermique⁹.

Dans un premier temps, j'ai mené une *analyse linéaire de stabilité* de la solution de conduction pure de ces équations vis-à-vis de perturbations sous la forme de rouleaux de convection de vecteur d'onde $\mathbf{q} = q_x \hat{\mathbf{x}} + q_y \hat{\mathbf{y}}$ avec $q_x > 0$,

- $q_y = 0$ pour des rouleaux normaux,
- $q_y > 0$ pour des rouleaux obliques « zigs »,
- $q_y < 0$ pour des rouleaux obliques « zags ».

Cette analyse de stabilité a confirmé l'existence d'instabilités structurantes en cohérence avec les autres études théoriques existantes (Dubois-Violette 1971, Feng et al. 1992) et les expériences, en particulier en montrant une tendance à préférer des rouleaux obliques à très faible champ magnétique [4,5].

Je l'ai complétée par le calcul systématique des solutions *faiblement non linéaires* rouleaux, et c'est à ce stade qu'un élément nouveau est apparu par rapport au niveau de compréhension que l'on avait en 1993 de ce système, dans lequel on considérait que seule la composante n_z du directeur joue un rôle important¹⁰. En effet je me suis aperçu, en effectuant l'élimination quasi statique du mode quadratique homogène associé à des rouleaux, que non seulement un mode homogène de température est créé, comme cela est très classique en thermoconvection, mais aussi, dans le cas de rouleaux obliques, un mode homogène de directeur de la forme

$$\boxed{n_y^H = -|A|^2 q_y f_{ny}(z)} \quad (1.14)$$

où A désigne l'amplitude du mode rouleaux primaire et, en première approximation, $f_{ny}(z) \simeq F_0 \cos[\pi z/(2h)]$ avec $F_0 > 0$. J'ai révélé l'existence de ce **mode moyen de torsion du directeur**, schématisé figure 1.6, dans mon article théorique [3], et analysé en détail son origine dans [4]. Dans ce dernier article j'ai montré qu'*un principe général de la nématohydrodynamique*

⁹Naturellement les approximations de Boussinesq sont utilisées.

¹⁰Ainsi le modèle de Dubois-Violette (1971) est strictement bidimensionnel xz , i.e. n_y y est toujours supposé nul, tandis que Feng et al. (1992) ont correctement pris en compte les effets que je vais décrire mais sans se rendre compte de leur importance et sans même les mentionner : ainsi le mode n_y^H (1.14) est (complètement!) caché dans le « vecteur d'état » $\mathbf{V}_{2r}(0)$ de leur équation (4.4c).

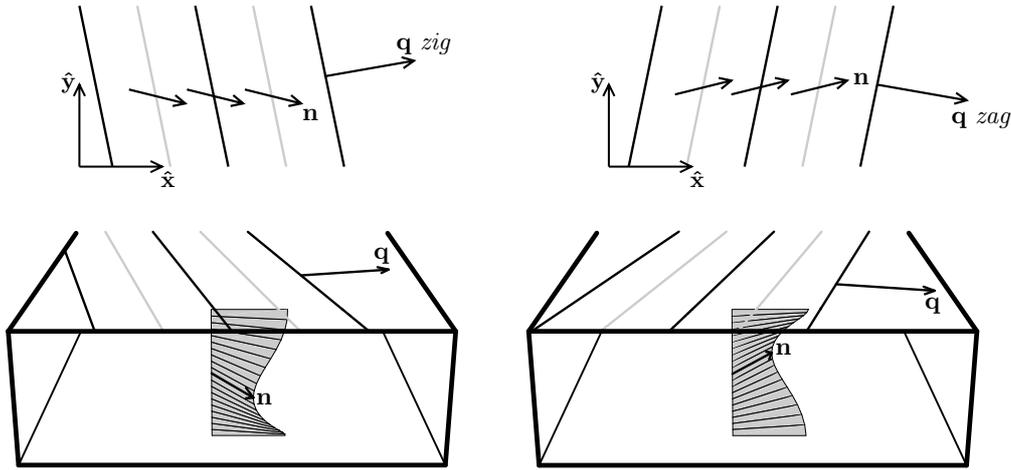


Fig. 1.6 – *Mode moyen* (1.14) *de directeur* dans des rouleaux obliques, à gauche du type *zig* et à droite du type *zag*, symbolisés par une alternance de courants froids et chauds comme figure 1.1. En haut on présente des vues de dessus schématiques sur lesquelles figurent le directeur moyen en milieu de couche. En bas les modes moyens de directeur sont présentés dans des vues en perspective de la couche de nématique en convection.

est le suivant : les *couples visqueux* exercés par le champ de vitesse sur le champ de directeur font que le *directeur* tend à éviter les gradients de vitesse qui lui sont transverses, i.e. à minimiser $\mathbf{n} \wedge \overline{\mathbf{grad}(\mathbf{v})} \cdot \mathbf{n}$. Ce principe joue déjà au stade linéaire puisque, dans une structure de rouleaux, le mode de vitesse primaire¹¹

$$w(x, y, z) = A f_w(z) \sin(q_x x + q_y y) \quad (1.15)$$

induit des gradients de vitesse dans la direction du directeur

$$\overline{\mathbf{grad}(w\hat{\mathbf{z}})} \cdot \mathbf{n} = A f_w(z) \cos(q_x x + q_y y) \hat{\mathbf{z}} \otimes \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \quad (1.16)$$

en milieu de couche. Pour réduire ces gradients, le *directeur* évite donc la direction du vecteur d'onde \mathbf{q} des rouleaux, tout d'abord en tournant dans le plan vertical c'est-à-dire en créant le mode n_z primaire¹²

$$\delta \mathbf{n} = n_z \hat{\mathbf{z}} \quad \text{avec} \quad n_z(x, z) = A f_{n_z}(z) \cos(q_x x + q_y y) . \quad (1.17)$$

En effet ce mode tend à imposer $\mathbf{n} \simeq \pm \hat{\mathbf{z}}$ au cœur des rouleaux, ce qui par insertion dans (1.16) conduirait bien à des gradients nuls. La considération de l'équation (1.16) montre qu'une autre façon pour le directeur d'éviter les gradients de vitesse consiste à tourner dans le plan horizontal vers une direction perpendiculaire au vecteur d'onde \mathbf{q} . Ce mode d'évitement, interdit dans des rouleaux normaux faiblement non linéaires à cause de leur invariance par les symétries « miroirs » par rapport à tout plan xz ,

$$\theta \mapsto \theta, \quad n_y \mapsto -n_y, \quad n_z \mapsto n_z, \quad u \mapsto u, \quad v \mapsto -v \quad \text{et} \quad w \mapsto w, \quad (1.18)$$

qui impose $n_y = 0$, se réalise dans des rouleaux obliques faiblement non linéaires, dans lesquels ces symétries sont brisées, et est exactement ce que décrit (1.14) et représente la figure 1.6.

¹¹Généralisation immédiate de (1.6) au cas d'un vecteur d'onde quelconque.

¹²Généralisation immédiate de (1.4) au cas d'un vecteur d'onde quelconque.

Ce mode moyen de directeur est excité de façon très similaire dans des rouleaux obliques en électroconvection, tels ceux de la figure 1.3, cf. la section IV.C de [7]. Il joue, à la fois en thermo- et électroconvection, un rôle très important pour expliquer plusieurs instabilités secondaires ; nous reviendrons là-dessus dès la section 2.1. Il faut enfin signaler que ce mode, « caché » dans les calculs des théoriciens de Bayreuth (cf. la note 10 du bas de la page 22), l'est aussi pour les expérimentateurs quels qu'ils soient (même ceux d'Orsay!), du moins lorsqu'ils utilisent des méthodes optiques standards basées sur l'usage de lumière transmise arrivant en incidence normale (ce fut mon cas, cf. la figure 1.4). En effet, d'après le *principe de Mauguin généralisé* (Kline & Kay 1965), dont une version simplifiée a été donnée dans Mauguin (1911), de tels modes de torsion du directeur sont alors *quasi invisibles* :

- la composante ordinaire de l'onde lumineuse se propage de toute façon en ligne droite ;
- sa composante extraordinaire voit un indice ne dépendant que de l'angle entre \mathbf{n} et \mathbf{P} , le vecteur de Poynting de l'onde, qui donne aussi la direction de propagation du rayon lumineux, or en pratique \mathbf{P} reste proche de $\hat{\mathbf{z}}$ donc cet angle est très peu modifié par un mode n_y [1].

Bien entendu, lorsque l'importance de ce mode de torsion a été réalisée, des méthodes expérimentales plus sophistiquées ont été mises en oeuvre pour le mettre en évidence. Ces méthodes reposent sur l'analyse fine de composantes polarisées elliptiquement de la lumière ordinaire transmise grâce à une lame quart d'onde disposée judicieusement entre la cellule de convection et l'analyseur. Pour ce qui concerne l'électroconvection planaire et des rouleaux obliques près du seuil, c'est Dennin (2000) qui a été le premier à mettre en évidence le mode moyen de torsion : sa figure 2 constitue une confirmation expérimentale nette du scénario prévu dans [3] et représenté ici figure 1.6.

1.2 Modes de vitesse et de pression en hydrodynamique

1.2.1 Systèmes étudiés : systèmes « hydrodynamiques » bidimensionnels

Convection annulaire tournante

De nombreux systèmes fluides newtoniens développant des instabilités structurantes sont, en première approximation, bidimensionnels. C'est le cas, en fait, des systèmes précédemment étudiés lorsqu'ils présentent des rouleaux normaux ; plus simplement les rouleaux de convection primaires du système de Rayleigh-Bénard proprement dit (cf. la figure 1.11) sont bidimensionnels. Cette bidimensionnalité est aussi une caractéristique des *modèles de convection tournante quasi géostrophique dans un cylindre annulaire* représentant la région « active » d'une coquille sphérique, modèles développés par Busse (1970) puis Busse & Or (1986), et que j'ai étudiés avec lui [10,12]. Dans ce dernier cas l'axe des rouleaux de convection n'est pas « choisi » parmi toutes les directions dégénérées d'un plan de façon un peu arbitraire comme dans le cas du système de Rayleigh-Bénard¹³, mais correspond à l'axe de rotation du système *modèle d'un noyau liquide de planète* (figures 1.7 et 1.8a), et ce en vertu de la contrainte de Proudman-Taylor due

¹³Dans un système réel ce plan - le plan moyen de la cellule de convection - n'est pas infini et ce sont typiquement les conditions limites latérales du problème qui privilégient telle ou telle orientation.

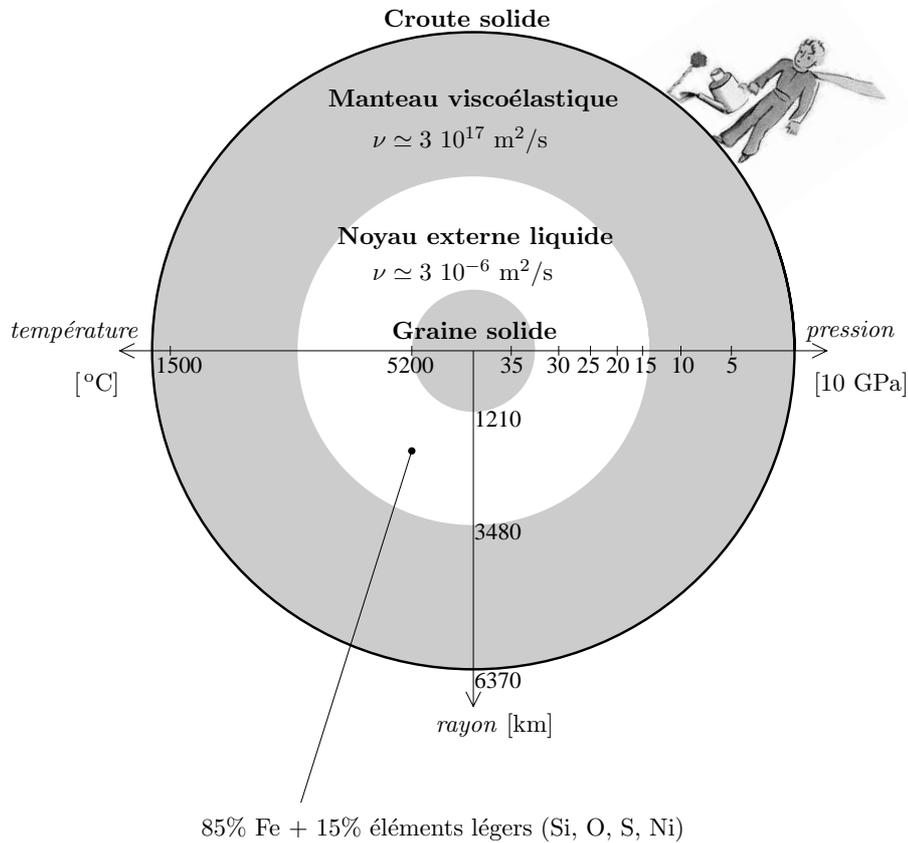


Fig. 1.7 – Structure interne de la planète que nous connaissons le mieux et qui nous supporte quotidiennement (voir par exemple Nataf & Sommeria 2000). Lorsque l'on s'enfonce dans les profondeurs de celle-ci, à environ 2900 km sous la surface a lieu, sous l'effet des températures très élevées, une transition de phase solide \rightarrow liquide. Par contre à très grande profondeur les pressions gigantesques qui règnent imposent une transition de phase inverse liquide \rightarrow solide. Entre le manteau externe et la graine interne solides ont donc lieu, dans le **noyau liquide**, des écoulements de type convectif. L'axe des températures ne figure qu'à titre indicatif, celles-ci étant très mal connues. Les valeurs données pour la viscosité cinématique ν aux temps longs sont aussi approximatives.

à la *rotation rapide*. Une prise de moyenne des équations de Navier-Stokes et de la chaleur dans la direction axiale conduit alors à des modèles posés dans le plan équatorial, plus précisément dans un anneau bidimensionnel (figure 1.8). En faisant une approximation de petit inter-rayon, on aboutit à des modèles cartésiens à résoudre dans une bande $(x, y) \in [0, L] \times [-h, h]$ où L est la longueur de périodicité du système dans la direction x , i.e. le périmètre moyen de l'anneau, et $2h$ l'inter-rayon, cf. [10,12] pour une présentation plus précise. Il faut mentionner que ces modèles ne s'appliquent pas directement au cas de la Terre pour plusieurs raisons :

- Ces modèles supposent, afin de permettre un traitement « perturbatif » de l'influence des conditions limites sur les « couvercles » délimitant le milieu fluide dans la direction axiale, que l'angle moyen entre ceux-ci et le plan équatorial (l'angle η_0 de la figure 1.8b) est très faible ;
- Ces modèles considèrent des écoulements thermoconvectifs en approximations de Boussinesq et avec des conditions limites isothermes, alors que dans le cas de la Terre on a aussi de la convection compositionnelle, puisque la graine cristallise lentement, et d'autre part des phénomènes de compressibilité pourraient intervenir. De plus, à cause de la désintégration radioactive de certains éléments encore actifs, on pourrait avoir dégagement interne de chaleur dans le noyau de la Terre ;
- Ces modèles négligent tout effet magnétohydrodynamique, alors que dans le noyau liquide de la Terre, de nature essentiellement métallique, des couplages de ce type sont responsables, par « effet dynamo », de la création et de l'entretien du champ magnétique propre de celle-ci¹⁴ ;
- Un dernier problème est celui de la *turbulence*, essentiellement non prise en compte dans les modèles quasi géostrophiques, alors qu'elle est très forte dans le cas de la Terre, puisque l'on estime que le nombre de Reynolds dans le noyau est de l'ordre de 10^8 (Nataf & Sommeria 2000).

Avec un petit peu d'optimisme, on peut néanmoins espérer qu'il existe quelque part dans l'univers des planètes plus petites et moins chaudes, sans champ magnétique propre, pour lesquelles ces modèles quasi géostrophiques ont une pertinence directe ! Il convient aussi de signaler que des *réalisations expérimentales* des systèmes du type de celui présenté figure 1.8b sont possibles, en faisant jouer à la force centrifuge le rôle de la gravité, et en inversant bien sûr le gradient thermique appliqué, i.e. en ayant $T_{ext} > T_{int}$ avec les notations de cette figure. Cette démarche a été initiée par Busse & Carrigan (1974), puis reprise par diverses équipes, cf. par exemple Aubert et al. (2001) et références incluses.

Dans tous ces modèles de convection tournante quasi géostrophique, on observe typiquement l'existence d'une *instabilité structurante* de la configuration de base non structurée, i.e. invariante dans la direction x ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(y) = (\Omega_0 - \Omega_1 y) \hat{\mathbf{x}} \quad (1.19)$$

¹⁴Pour une introduction « en douceur » à la problématique de la *géodynamo*, on peut consulter par exemple Nataf & Sommeria (2000) ; un article plus pointu portant sur des tentatives de modélisation et simulation récentes est celui de Busse (2000).

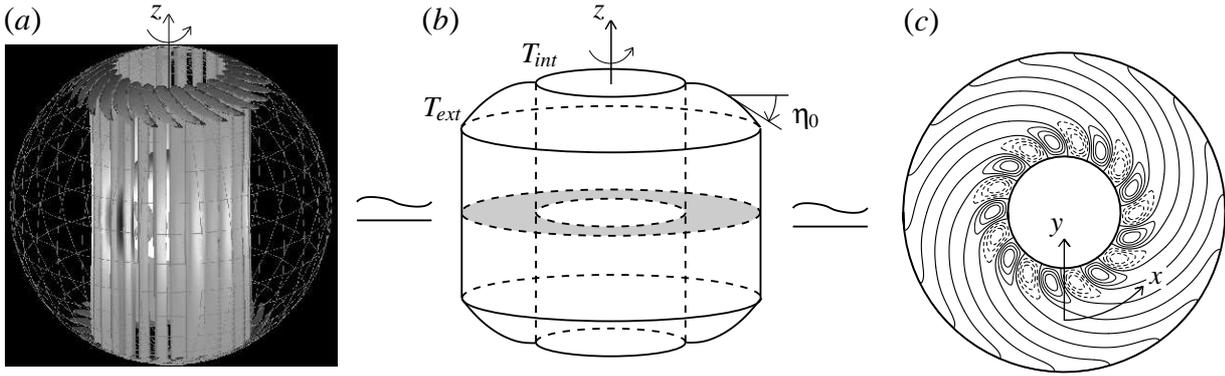


Fig. 1.8 – (a) : Résultat d’une simulation numérique d’un modèle de coquille sphérique chauffée au niveau de sa « graine » intérieure et tournant autour de l’un de ses axes de révolution z (Dormy 1997). Les **colonnes de convection** correspondant à la structure primaire critique sont caractérisées par des isosurfaces de vorticité axiale. (b) : Géométrie des modèles proposés par Busse & Or (1986) : un cylindre annulaire approxime la région de la coquille dans laquelle ont lieu les écoulements. Grâce à une intégration le long de l’axe z , on obtient un problème bidimensionnel qui doit être résolu dans l’anneau représenté en gris. (c) : Lignes de courant d’un mode neutre de l’un de ces modèles, représentées dans l’anneau précédent. Les figures (b) et (c) sont tirées de [12], avec cependant un choix différent des axes de coordonnées curvilignes x et y , cf. la note numéro 16 du bas de la page 28.

correspondant à la rotation solide du fluide à la vitesse du cylindre; en se plaçant *dans le référentiel lié au cylindre*, on peut en fait poser

$$\mathbf{v}_0(y) = \mathbf{0} . \quad (1.20)$$

Les ondes qui déstabilisent cette configuration de conduction pure ont été appelées **ondes de Rossby thermiques** par Busse & Or (1986), car leur mécanisme de propagation dans la direction prograde est très proche de celui qui fait se propager des ondes de Rossby au-dessus d’un « plan β » (cf. par exemple Holton 1992), tandis que, au contraire des ondes de Rossby purement hydrodynamiques, elles sont caractérisées par des modulations de vitesse

$$\mathbf{v}_1 = u_1(x, y, t)\hat{\mathbf{x}} + v_1(x, y, t)\hat{\mathbf{y}} = A [\tilde{u}_1(y)\hat{\mathbf{x}} + \tilde{v}_1(y)\hat{\mathbf{y}}] \exp[i(qx - \omega t)] + c.c. \quad (1.21)$$

et de température. Une propriété remarquable du modèle de Busse le plus simple, c’est-à-dire en *conditions de glissement sans frottement* aux parois et *en négligeant la courbure des couvercles* (ce modèle est présenté dans [10], cf. la figure 1 de cet article reproduite page 170, à comparer à la figure 1.8b ci-dessus, tirée de [12]), est qu’il permet un calcul analytique complet de ces ondes, cf. les formules (3.2) à (3.4) de [10]. Mentionnons aussi que les lois d’échelles déduites en rotation très rapide (rappelées à la fin de la section 3.1 de [10]) sont aussi valables pour la convection tridimensionnelle dans une coquille sphérique, voir par exemple Dormy et al. (2004).

Une question naturelle est alors celle de la possible modification de l’écoulement moyen en x , par effet non linéaire quadratique i.e. à l’ordre A^2 . Un tel **écoulement moyen** $\langle \mathbf{v}_2 \rangle_x$, dit aussi **zonal** dans ce contexte planétologique, ne peut avoir lieu que dans la direction azimuthale x en vertu de l’hypothèse d’incompressibilité de Boussinesq : il prend donc la forme

$$\boxed{\langle \mathbf{v}_2 \rangle_x = |A|^2 u_H(y) \hat{\mathbf{x}}} . \quad (1.22)$$

Introduisant typiquement, puisque le profil d'écoulement $u_H(y) \neq \text{constante}$ en général, une *rotation différentielle*, cet écoulement zonal jouerait un rôle très important dans l'effet dynamo, via l'effet dit « ω », cf. par exemple Nataf & Sommeria (2000) page 67, en notant que dans cet ouvrage on qualifie ces mouvements de rotation différentielle d'« *inexpliqués* ». C'est justement en étudiant les mécanismes qui contrôlent la forme de l'écoulement u_H que j'ai développé une première version de l'analyse [10] que je vais maintenant présenter.

Écoulements ouverts cisailés

Afin de démontrer l'« universalité » de cette analyse, je vais l'illustrer principalement non pas grâce à un écoulement de convection quasi géostrophique, mais plutôt par l'exemple d'**ondes hydrodynamiques déstabilisant un écoulement ouvert cisailé**, en l'occurrence l'écoulement de Poiseuille plan¹⁵. Ce système modèle peut être situé dans le même cadre conceptuel que celui des modèles quasi géostrophiques introduits ci-dessus, à condition de considérer que dans la configuration de base (1.19) on a

$$\mathbf{v}_0(y) = U_0 (1 - y^2/h^2) \hat{\mathbf{x}}, \quad (1.23)$$

où $2h$ est l'espacement entre les parois planes, au lieu de (1.20). D'autre part les conditions limites de périodicité sous $x \mapsto x + L$ résultent maintenant d'un choix de modélisation et non d'une contrainte topologique due à la géométrie annulaire. Une autre nouveauté très importante introduite par une géométrie d'écoulement ouverte est la possibilité d'une modification à l'ordre A^2 du gradient de pression motrice moyen dans la direction x , i.e. on peut avoir

$$\boxed{\langle \partial_x \hat{p}_2 \rangle_x = |A|^2 G_H} \quad (1.24)$$

avec un **gradient de pression moyen réduit** $G_H \neq 0$. Rappelons que la pression motrice \hat{p} est la somme de la pression hydrodynamique p et de $-\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ où ρ est la densité du fluide, supposé incompressible, \mathbf{x} la position courante, et que son gradient moyen a une grande importance énergétique puisqu'il définit la **perte de charge** associée à l'écoulement selon

$$P_c = \frac{L \langle -\partial_x \hat{p} \rangle_x}{\rho g} = \frac{L \langle -\partial_x \hat{p}_0 \rangle_x}{\rho g} + \frac{L \langle -\partial_x \hat{p}_2 \rangle_x}{\rho g} + t.o.s. \quad (1.25)$$

en régime faiblement non linéaire, en notant \hat{p}_0 le champ de pression motrice correspondant à l'écoulement de base (1.23).

Plus généralement, d'ailleurs, l'analyse qui va suivre est pertinente pour un écoulement de base quelconque¹⁶

$$\mathbf{v}_0(y) = u_0(y) \hat{\mathbf{x}} \quad (1.26)$$

¹⁵Les résultats que je vais présenter concernant ces ondes de Tollmien-Schlichting feront prochainement l'objet d'une publication ; je reviendrai là-dessus dans mes perspectives.

¹⁶C'est à ce stade que l'on peut justifier le choix des coordonnées x et y utilisé dans ce mémoire, différent de celui fait dans [10,12], dans lesquels on utilise plutôt y pour désigner la coordonnée suivant laquelle la configuration de base est invariante. Cette modification permet de se conformer aux notations traditionnellement utilisées en écoulements ouverts cisailés, qui consistent à désigner par x la coordonnée suivant laquelle la configuration de base est invariante.

et un système « hydrodynamique » quelconque (i.e. en présence éventuellement de couplages thermiques, d'effets non newtoniens, etc...) - d'où les guillemets ici et dans le titre de cette section - à condition que l'écoulement soit *incompressible bidimensionnel décrit par un champ de vitesse eulérien*. En conséquence l'équation de la vitesse moyenne (1.22), qui fait aussi intervenir le gradient de pression moyen (1.24) en géométrie ouverte, contient toujours le *terme non linéaire source*¹⁷

$$\partial_y \tau_{xy} \quad (1.27)$$

où

$$\tau_{xy} = -\rho \langle u_1 v_1 \rangle_x \quad (1.28)$$

est la *contrainte de Reynolds* de cisaillement, u_1 et v_1 étant les composantes de (1.21). La problématique qui nous intéresse est donc d'analyser finement la forme de cette contrainte de Reynolds en lien avec la forme du champ de vitesse critique (1.21). Ceci requiert dans un premier temps une description fine de la structure critique définie par (1.21).

1.2.2 Caractérisation de la structure primaire périodique : séparons module et phase !

Considérons un système fluide bidimensionnel xy , hydrodynamique, thermohydrodynamique, ou même plus compliqué, caractérisé par l'existence d'une *instabilité structurante* de la configuration de base non structurée (1.26). L'incompressibilité supposée du fluide permet de décrire tout écoulement grâce à sa *fonction courant* ψ telle que le champ de vitesse

$$\mathbf{v} = \mathbf{rot}(\psi \hat{\mathbf{z}}) = (\partial_y \psi) \hat{\mathbf{x}} - (\partial_x \psi) \hat{\mathbf{y}} . \quad (1.29)$$

Par analyse linéaire de stabilité de la configuration de base, on suppose que l'on peut calculer un *mode critique* de *nombre d'onde* q qui devient neutre lorsque le paramètre de contrôle principal du système, le *nombre de Reynolds* pour l'écoulement de Poiseuille plan, un *nombre de Rayleigh* en convection, atteint une valeur critique. En toute généralité le champ de vitesse associé à ce mode critique prend la forme

$$\mathbf{v}_1 = (\partial_y \psi_1) \hat{\mathbf{x}} - (\partial_x \psi_1) \hat{\mathbf{y}} \quad \text{avec} \quad \psi_1 = A \Psi_1(y) \exp[i(qx - \omega t)] + c.c. \quad (1.30a)$$

où A est l'amplitude complexe, $\Psi_1(y)$ la *fonction courant complexe*, ω la pulsation de ce mode¹⁸.

Une première façon de caractériser le champ de vitesse (1.30a), de composantes

$$u_1 = A \{ \Psi_1'(y) \exp[i(qx - \omega t)] + \Psi_1^{*'}(y) \exp[-i(qx - \omega t)] \} , \quad (1.30b)$$

$$v_1 = A \{ -iq \Psi_1(y) \exp[i(qx - \omega t)] + iq \Psi_1^*(y) \exp[-i(qx - \omega t)] \} , \quad (1.30c)$$

en supposant pour simplifier l'écriture A réelle¹⁹, consiste à calculer son *énergie cinétique moyenne* à une position transverse fixée. Cette énergie est naturellement somme de deux termes,

¹⁷Le terme non linéaire analogue $\partial_x \tau_{xx}$ avec $\tau_{xx} = -\rho \langle u_1 u_1 \rangle_x$ est bien sûr identiquement nul. Les autres termes non linéaires de cette équation d'élimination quasi statique peuvent être traités par superposition.

¹⁸Nulle dans le cas d'une instabilité stationnaire, comme en thermoconvection d'un fluide newtonien ou de cristaux liquides, non nulle dans le cas d'une instabilité oscillante, comme en thermoconvection *tournante* ou en écoulements ouverts cisailés.

¹⁹Un changement de la phase de A correspond à une simple translation de la structure dans la direction x .

$$E_c = E_{cx} + E_{cy} \quad (1.31a)$$

$$\text{avec } E_{cx} = \frac{1}{2}\rho \langle u_1^2 \rangle_x = \rho |A|^2 |\Psi_1'(y)|^2 \quad (1.31b)$$

$$\text{et } E_{cy} = \frac{1}{2}\rho \langle v_1^2 \rangle_x = \rho |A|^2 q^2 |\Psi_1(y)|^2 \quad (1.31c)$$

Cette dernière équation est intéressante car elle donne *la signification physique du module de la fonction courant complexe critique* : il correspond à l'énergie cinétique transverse moyenne E_{cy} . Dans le cas de l'onde de Tollmien-Schlichting critique déstabilisant l'écoulement de Poiseuille plan²⁰, cette énergie cinétique est, par symétrie, maximale en milieu de couche, comme le montre la figure 1.9.

Bien entendu ce type de caractérisation « globale » n'est pas suffisant pour caractériser le champ de vitesse (1.30), et il convient de réaliser une représentation « locale » de celui-ci, typiquement en traçant les lignes d'iso-valeurs de ψ_1 ou *lignes de courant*. Celles-ci donnent bien le champ de vitesse

$$\mathbf{v}_1 = \nabla(\psi_1) \wedge \hat{\mathbf{z}} \quad (1.32)$$

d'une manière « directe », puisqu'il est facile d'extraire par la pensée le gradient d'un champ scalaire représenté par ses lignes iso-valeurs, et qu'il est encore plus facile d'effectuer par la pensée un produit vectoriel. Un exemple de telles lignes de courant est présenté figure 1.10a. Dans ce cas précis, l'écoulement de base $u_0(y) = U_0 (1 - y^2/h^2)$ étant non trivial, un modèle complet du champ de vitesse près du seuil d'excitation de cette onde et en régime linéaire est donné par

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \quad (1.33)$$

à qui correspondent les lignes de courant de la figure 1.10b. Rappelons aussi qu'il est traditionnel de distinguer, dans le cas de la structure cellulaire pure de fonction courant ψ_1 , les niveaux $\psi_1 > 0$ ou $\psi_1 < 0$, que l'on représente avec des lignes fines continues (resp. pointillées), des niveaux $\psi_1 = 0$, que l'on représente avec des lignes épaisses, et qui correspondent aux *séparatrices* entre deux cellules consécutives. Ces dernières lignes se calculent, si $\phi_1(y)$ désigne une détermination de l'argument de la fonction courant complexe $\Psi_1(y)$, en résolvant pour x l'équation

$$\psi_1 = 2A|\Psi_1(y)| \cos[qx - \omega t + \phi_1(y)] = 0 ,$$

ce qui donne

$$x_n(y) = -\frac{\phi_1(y)}{q} + \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} + ct \quad (1.34)$$

où $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda = 2\pi/q$ est la période, $c = \omega/q$ la vitesse de phase de l'onde. Ainsi *la géométrie des séparatrices révèle la phase de la fonction courant complexe*. En convection de Rayleigh-Bénard par exemple, la fonction courant $\Psi_1(y)$ peut être choisie réelle, i.e. on a $\phi_1(y) = 0$. En conséquence on a des séparatrices droites comme le montre la figure 1.11. Au contraire, la fonction courant complexe d'onde de Tollmien-Schlichting mérite son adjectif, comme le montre la figure 1.10a ; c'est seulement dans le cœur du canal qu'elle peut être choisie réelle, alors que dans les couches limites proches des parois son argument varie rapidement.

²⁰J'ai calculé la fonction courant complexe critique grâce à une résolution numérique, par la méthode de Galerkin, de l'équation de Orr-Sommerfeld.

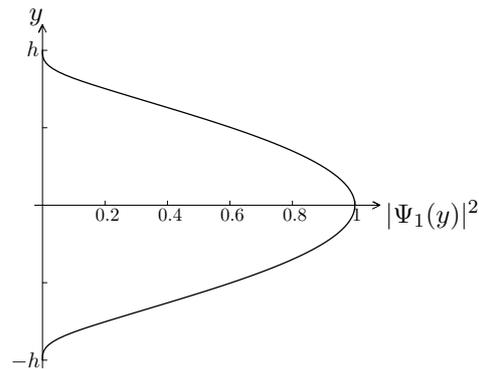


Fig. 1.9 – Caractérisation de l'*onde de Tollmien-Schlichting critique déstabilisant l'écoulement de Poiseuille plan* : module carré de la fonction courant complexe (adimensionnée) en fonction de la coordonnée transverse y . En vertu de (1.31c), on visualise ainsi l'énergie cinétique transverse moyenne E_{cy} de l'écoulement associé.

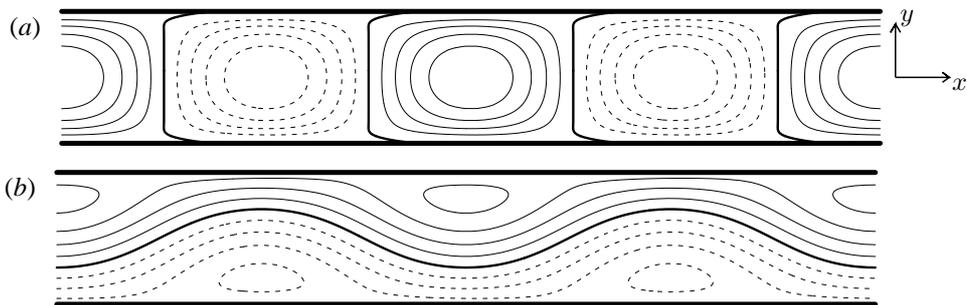


Fig. 1.10 – Caractérisation de l'*onde de Tollmien-Schlichting critique déstabilisant l'écoulement de Poiseuille plan* : (a) : lignes de courant du champ de vitesse de la structure seule (1.30) ; (b) : lignes de courant du champ de vitesse total (1.33). En vertu de (1.34), les lignes séparatrices épaisses en (a) représentent la fonction $-\arg[\Psi_1(y)]/q$.

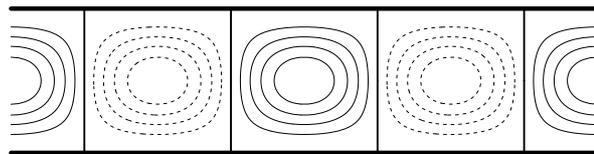


Fig. 1.11 – Caractérisation des rouleaux de Rayleigh-Bénard critiques grâce à leurs lignes de courants.

1.2.3 Modes de vitesse et de pression moyens : une expression physique de la contrainte de Reynolds source

Munis de la caractérisation fine de la structure primaire exprimée par les équations (1.31) et (1.34), nous pouvons maintenant nous pencher sur la problématique de la création, par des effets non linéaires à l'ordre A^2 , d'un écoulement moyen (1.22) ou d'un gradient de pression moyen (1.24). L'équation d'élimination quasi statique qui doit être résolue pour calculer ces modes quadratiques homogènes est l'équation de la quantité de mouvement suivant x à l'ordre A^2 , moyennée par rapport à x . Dans le cas d'un fluide newtonien, et en l'absence d'autres effets²¹, cette équation prend la forme

$$0 = -|A|^2 G_H + \mu |A|^2 \partial_y^2 u_H + \partial_y \tau_{xy} \quad (1.35)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide et, en vertu de (1.28) et (1.30), le terme d'advection dû à la description eulérienne adoptée pour le mouvement dérive de

$$\tau_{xy} = -\rho \langle u_1 v_1 \rangle_x = \rho q |A|^2 i(\Psi_1'^* \Psi_1 - \Psi_1' \Psi_1^*) = 2\rho q |A|^2 \text{Im}(\Psi_1' \Psi_1^*) . \quad (1.36)$$

Cette expression est classique : elle apparaît par exemple dans Drazin & Reid (1981). Classique est aussi le critère stipulant que $\tau_{xy} = 0$ si on peut choisir Ψ_1 réelle, comme en convection de Rayleigh-Bénard, ce qui correspond d'ailleurs à l'existence d'une symétrie « miroir » par rapport à un plan yz ,

$$x \mapsto -x \implies \psi_1 \mapsto \psi_1, \quad u_1 \mapsto u_1 \quad \text{et} \quad v_1 \mapsto -v_1 . \quad (1.37)$$

Cependant, lorsque cette symétrie est brisée, hormis quelques formules valables seulement en écoulements ouverts et non visqueux²², on ne dispose pas d'une interprétation physique fine générale de τ_{xy} . On a alors typiquement recours à un calcul numérique « aveugle » de τ_{xy} ; c'est ce qu'ont fait par exemple Reynolds & Potter (1967) en écoulement de Poiseuille plan. Or, en partant de l'écriture polaire

$$\Psi_1(y) = |\Psi_1(y)| \exp[i\phi_1(y)] \quad (1.38)$$

de la fonction courant complexe, on obtient, par injection dans (1.36),

$$\tau_{xy} = 2\rho q |A|^2 |\Psi_1(y)|^2 \phi_1'(y) , \quad (1.39)$$

d'où, par inversion des formules (1.31) et (1.34), dont on conçoit maintenant l'intérêt profond, la relation

$$\boxed{\tau_{xy} = -2 E_{cy} x_0'} . \quad (1.40)$$

Cette relation offre une interprétation générale de la contrainte de Reynolds, qui apparaît comme *l'opposé du double produit de l'énergie cinétique transverse moyenne fois la pente x_0' des séparatrices de cet écoulement*, et peut être estimée « à l'oeil ». Cette formule, qui montre bien l'influence séparée d'un facteur *énergétique* et d'un facteur *géométrique*, ce dernier soulignant l'importance de la forme des séparatrices de l'écoulement primaire cellulaire²³,

²¹Insistons encore une fois sur le fait que des termes linéaires ou non linéaires peuvent éventuellement être ajoutés à (1.35), sans que cela rende cette analyse caduque.

²²Telles celles attribuées traditionnellement à Lord Rayleigh, bien que celui-ci n'ait pas précisément utilisé le concept de contrainte de Reynolds.

²³Ainsi il ne suffit pas d'avoir de l'énergie cinétique pour créer des contraintes de Reynolds : si les séparatrices sont droites, i.e. $x_n' = 0$, comme dans le cas des rouleaux de Rayleigh-Bénard, on a $\tau_{xy} = 0$.

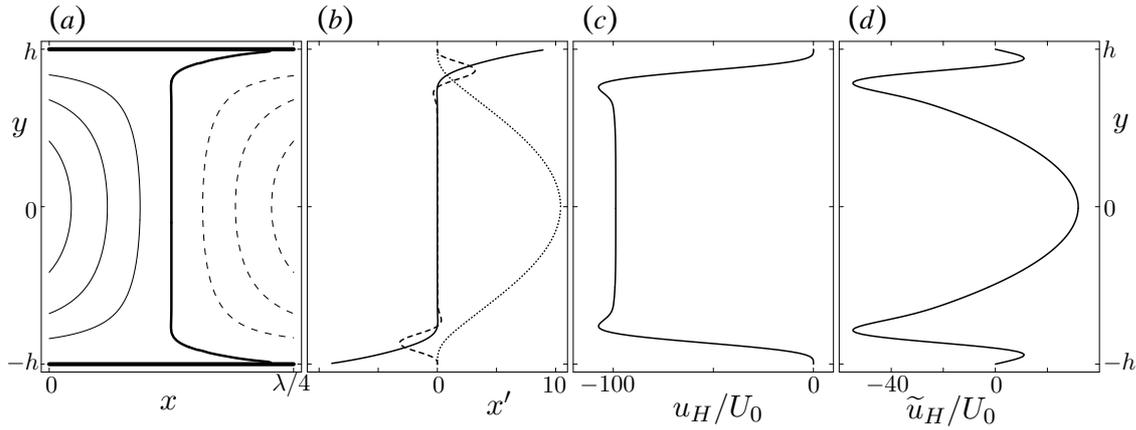


Fig. 1.12 – (a) : Agrandissement, autour d’une séparatrice $x_0(y)$ (ligne épaisse), des lignes de courant de l’onde de Tollmien-Schlichting critique déstabilisant l’écoulement de Poiseuille plan (cf. la figure 1.10a). (b) : La courbe continue montre la pente $x'_0(y)$ de cette séparatrice, la courbe pointillée l’énergie cinétique transverse moyenne E_{cy} (adimensionnée et multipliée par un facteur 10, cf. la figure 1.9), la courbe tiretée le produit (adimensionné) $40E_{cy}x'_0$; cette courbe indique donc, d’après (1.40), le profil en y de l’opposé de la contrainte de Reynolds, soit $-\tau_{xy}$. (c) : **Écoulement moyen** u_H en condition de pertes de charge fixées d’après (1.41). (d) : **Écoulement moyen** \tilde{u}_H en condition de débit fixé d’après (1.42) et (1.43).

est, à ma connaissance, nouvelle. J’avais établi une formule similaire dans [10] où²⁴ je n’avais cependant pas opéré l’identification de l’énergie cinétique effectuée ici. Je l’avais illustrée sur la figure 5 de [10] qui montre qu’en convection quasi géostrophique dans un anneau sans effets de courbure des couvercles, en conditions d’adhérence aux bords on a des séparatrices non droites et donc création d’un écoulement moyen à l’ordre quadratique. Ceci constitue une nouveauté par rapport au modèle avec conditions de glissement sans frottements, dans lequel un écoulement moyen n’apparaît qu’à l’ordre A^4 , cf. Busse & Or (1986).

J’illustre ici (1.40), dans un premier temps, sur le cas de l’*onde de Tollmien-Schlichting* déstabilisant l’écoulement de Poiseuille plan en *condition de pertes de charge fixées*

$$P_c = P_{c0} = \frac{L \langle -\partial_x \hat{p}_0 \rangle_x}{\rho g}$$

dans (1.25), soit, en vertu de (1.24),

$$G_H = 0.$$

Ainsi le terme de pression (motrice) disparaît dans l’équation de Navier-Stokes (1.35), que l’on peut intégrer une fois par rapport à la coordonnée transverse y pour obtenir²⁵

$$0 = \mu |A|^2 u'_H + \tau_{xy} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{u'_H = -\frac{\tau_{xy}}{\mu |A|^2} = \frac{2 E_{cy} x'_0}{\mu |A|^2}} \quad (1.41)$$

en vertu de (1.40). En intégrant donc la courbe $-\tau_{xy}(y)$ représentée à un facteur près²⁶ figure 1.12b, on obtient la forme de l’*écoulement moyen* u_H figure 1.12c, dont on constate qu’il tend à faire *diminuer le débit*.

²⁴L’équation 4.25b de [10] correspond à une primitive de (1.35) en géométrie annulaire i.e. dans le cas où $G_H = 0$; c’est donc l’analogie de l’équation (1.41) plus bas.

²⁵La constante d’intégration est nulle car u'_H et τ_{xy} sont impaires sous $y \mapsto -y$.

²⁶Les résultats montrés figure 1.12 reposent sur un adimensionnement standard utilisant h comme unité de longueur, U_0 comme unité de vitesse, ρU_0^2 comme unité de densité d’énergie. En prenant d’autre part $A = 1$ la

Si, au contraire, on choisit d'ajuster les pertes de charge afin de maintenir un **débit fixé**, c'est-à-dire que l'on ajuste le **gradient de pression moyen réduit** G_H de sorte que le nouvel écoulement moyen \tilde{u}_H déduit de

$$0 = -|A|^2 G_H + \mu |A|^2 \partial_y^2 \tilde{u}_H + \partial_y \tau_{xy} \quad (1.35)$$

vérifie

$$\langle \tilde{u}_H \rangle_y = 0 ,$$

on peut montrer facilement que

$$\boxed{\tilde{u}_H - u_H = \frac{G_H}{2\mu} (y^2 - h^2)} \quad (1.42)$$

avec

$$\boxed{G_H = \frac{3\mu}{h^2} \langle u_H \rangle_y} . \quad (1.43)$$

Ce gradient de pression moyen réduit strictement négatif indique des **pertes de charge supplémentaires** en régime faiblement non linéaire, puisque, en vertu de (1.24) et (1.25), on y a

$$P_c = P_{c0} - |A|^2 \frac{LG_H}{\rho g} + t.o.s. ; \quad (1.44)$$

on peut aussi noter que le nouveau profil d'écoulement moyen quadratique \tilde{u}_H , représenté sur la figure 1.12d, correspond bien à celui calculé numériquement par Reynolds & Potter (1967) et présenté sur leur figure 3c.

En résumé, en pertes de charge fixées on perd en débit lorsque l'écoulement commence à transiter vers la turbulence, tandis que, si on veut maintenir un débit fixé, il faut pour cela injecter plus d'énergie dans le système en augmentant la charge. Ces lois, connues « intuitivement » par les ingénieurs hydrauliciens, ne sont pas pour autant très bien comprises d'un point de vue fondamental, et c'est pourquoi l'analyse que je viens de présenter me semble intéressante. Elle peut être complétée par un calcul énergétique montrant que

$$G_H = -\frac{D_1}{\langle u_0(y) \rangle_y} = -\frac{3 D_1}{2 U_0} \quad (1.45)$$

où D_1 est la *puissance volumique moyenne dissipée par viscosité* dans l'écoulement à l'ordre A (1.30) : le fait que G_H et $\langle u_H \rangle_y$ soient négatifs est donc une conséquence des principes de la thermodynamique. Je reviendrai section 2.2 sur la théorie faiblement non linéaire complète des ondes de Tollmien-Schlichting.

En attendant, il vaut la peine de donner un autre exemple d'application de la formule (1.40), tiré de [12] et concernant un modèle de **convection tournante quasi géostrophique** avec des **couvercles courbés**, par opposition au cas de couvercles coniques étudié dans [10], et déjà

forme adimensionnelle de (1.41) est

$$u'_H = -Re_c \tau_{xy} = 2Re_c E_{cy} x'_0$$

où le nombre de Reynolds critique $Re_c = 5772$, ce qui explique les grandes valeurs de u_H .

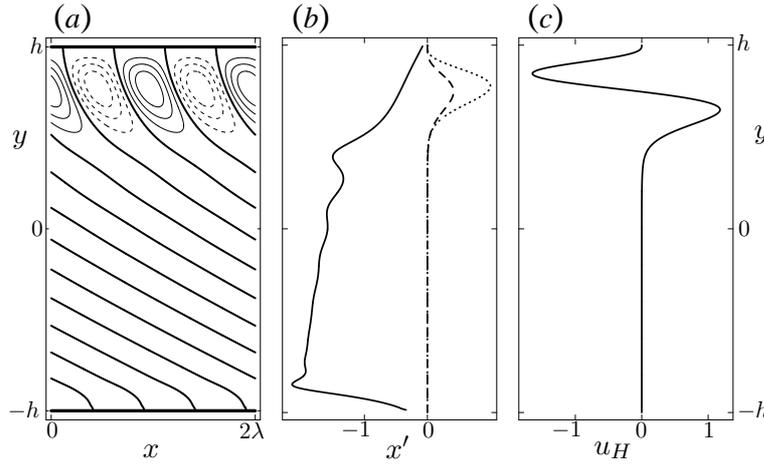


Fig. 1.13 – (a) : Lignes de courant d'un mode critique spiral d'un modèle de convection tournante quasi géostrophique avec effets de courbure. Les lignes épaisses représentent les séparatrices $x_n(y)$. Notez que j'ai gardé ici la géométrie cartésienne du modèle liée à l'approximation de petit inter-rayon, contrairement à ce qui a été fait figure 1.8c, où la bande $(x, y) \in [0, L] \times [-h, h]$ a été repliée en un anneau. (b) : La courbe continue montre la pente $x'_0(y)$ d'une séparatrice, la courbe pointillée l'énergie cinétique transverse moyenne E_{cy} , et la courbe tiretée le produit $-E_{cy}x'_0$; cette courbe indique donc, d'après (1.40), le profil en y de la contrainte de Reynolds τ_{xy} . (c) : **Écoulement moyen** u_H déduit de (1.47). Cette figure correspond à une version modifiée de la figure 10 de [12], auquel je vous invite à vous reporter pour plus de détails.

évoqué un peu plus haut. Une autre différence entre les articles [10] et [12] réside dans la prise en compte effectuée dans [12] de l'effet du *pompage d'Ekman* dans les couches limites au niveau de ces couvercles. Cet effet introduit un terme de friction supplémentaire dans l'équation de Navier-Stokes

$$0 = \mu |A|^2 \partial_y^2 u_H - f_E |A|^2 u_H + \partial_y \tau_{xy} \quad (1.46)$$

pour le mode moyen de vitesse engendré par une **onde de Rossby thermique**, où f_E est un « coefficient de friction d'Ekman » [12]. Il s'avère qu'en première approximation le terme de friction d'Ekman domine le terme visqueux, ce qui nous a permis de proposer la formule analytique suivante pour estimer le profil d'écoulement zonal :

$$\boxed{u_H \simeq f_E^{-1} \frac{\tau'_{xy}}{|A|^2} = -2 f_E^{-1} \frac{(E_{cy} x'_0)'}{|A|^2}} \quad (1.47)$$

en faisant usage de (1.40). Cette estimation est illustrée par la figure 1.13 dans le cas d'un mode critique « *spiral* » à nombre de Prandtl thermique élevé, d'une forme analogue à celle du mode neutre de la figure 1.8c. On obtient à partir de l'estimation *semi-analytique* (1.47) un écoulement zonal rétrograde près de la graine, prograde plus à l'extérieur, puis nul loin de la paroi interne (figure 1.13c), en accord qualitatif avec le profil calculé *numériquement* par Aubert et al. (2003), et montré sur leur figure 7a.

Chapitre 2

Action des modes moyens sur les modes de petite échelle

Un mode moyen d'ordre non linéaire quadratique rétroagit génériquement sur les modes primaires à l'ordre non linéaire cubique. Conceptuellement, la rétroaction la plus « simple » est exercée sur le mode primaire même qui a engendré le mode moyen. Ce type de rétroaction sera illustré section 2.2 dans le cadre « hydrodynamique » au sens large développé dans la deuxième partie du chapitre 1, i.e. sur l'exemple d'ondes de Tollmien-Schlichting. Avant cela, je vais présenter un exemple « nématohydrodynamique » au sens large dans lequel la rétroaction du mode moyen engendré par un mode primaire « A » s'exerce sur un autre mode primaire « B », et a pour effet de l'exciter. Cet exemple est important d'un point de vue historique puisque c'est en l'étudiant que je me suis aperçu de l'importance du mode moyen de directeur dont j'ai parlé au chapitre 1. Il me permettra aussi d'introduire la méthode systématique d'analyse de mécanismes non linéaires que j'ai mise au point à la toute fin de ma thèse.

2.1 Mode de directeur : transition vers le bimodal variqueux

2.1.1 Le bimodal variqueux : une structure générique en convections des nématiques

Lorsque des rouleaux obliques sont obtenus près du seuil d'*électroconvection* planaire, c'est-à-dire à basse fréquence ou au delà du seuil ϵ_{ZZ} (Ribotta et al. 1986), et que l'on continue d'augmenter le paramètre de contrôle principal

$$\epsilon = \left(\frac{\delta V}{\delta V_c} \right)^2 - 1 \quad (2.1)$$

où δV est la tension appliquée, δV_c sa valeur critique, on observe en général, au dessus d'un nouveau seuil ϵ_{VH} , une transition vers un *bimodal*. Ce bimodal correspond à la superposition du mode primaire de rouleaux obliques initial d'amplitude A et de vecteur d'onde \mathbf{q} , avec un

autre mode que l'on peut aussi qualifier de primaire¹, d'amplitude B et de vecteur d'onde \mathbf{k} . On peut donc décrire, en utilisant les notations de la section 1.1.1, le champ de variation du directeur dans ce bimodal sous la forme

$$\delta \mathbf{n} = \mathbf{n} - \hat{\mathbf{x}} = [A \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) + B \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + c.c.] f_{nz}(z) \hat{\mathbf{z}} + t.o.s. \quad (2.2)$$

Comme près du seuil secondaire ϵ_{VH} on a $|B| < |A|$, on observe une « modulation » du mode A par le mode B sous la forme d'une succession, le long des rouleaux du mode A , de « pincements » et de « dilatations », d'où le nom de **bimodal variqueux**² donné à cette structure par Ribotta & Joets (1986). En début de thèse j'ai refais des expériences en électroconvection avec Ahmed Belaidi, et nous avons pris la photographie présentée figure 2.1a, en tout point analogue à celle présentée sur la figure 1 de Ribotta & Joets (1986).

Lors de ma thèse, j'ai démontré expérimentalement l'existence de la même transition en *thermoconvection* [2,5], cf. la figure 2.1b. L'analogie entre les deux photographies de la figure 2.1 est frappante si l'on se souvient que l'électroconvection et la thermoconvection reposent sur des mécanismes microscopiques très différents; on peut aussi rappeler que l'expérience d'électroconvection a été réalisée dans une cellule d'environ 20 μm d'épaisseur alors que celle de thermoconvection a été réalisée dans une cellule d'environ 1 mm d'épaisseur.

Un point important concernant cette transition est que le vecteur d'onde \mathbf{k} du nouveau mode primaire qui apparaît est fonction du vecteur d'onde \mathbf{q} du mode primaire initial, et que si \mathbf{q} est « zig » (i.e. $q_x q_y > 0$) alors \mathbf{k} est « zag » (i.e. $k_x k_y < 0$), et vice-versa (rappelons que la définition des « zig-zags » a été donnée figure 1.3). Ce phénomène de **sélection du vecteur d'onde dual** \mathbf{k} est mis en évidence sur la figure 2.2, dont on peut noter qu'elle est plus facile à interpréter que la figure 2.1 puisqu'elle présente *grosso-modo* une intensité transmise proportionnelle à la valeur moyenne transverse de n_z^2 , i.e. $\langle n_z^2 \rangle_z$ [1]; ainsi, d'ailleurs, une reconstitution numérique de la figure 2.2 est possible à partir du modèle (2.2), et donne de très bons résultats. Une sélection du vecteur d'onde dual identique est observée en électroconvection (voir Ribotta & Joets 1986 et plus récemment Dennin 2000).

2.1.2 Un modèle faiblement non linéaire - et une méthode systématique - pour analyser cette transition

Lorsque nous avons réalisé avec Roland Ribotta l'« universalité » de cette transition au bimodal variqueux en convections des nématiques, nous avons décidé de développer un modèle faiblement non linéaire pour l'analyser et si possible l'expliquer. Afin de décrire ce modèle, posé dans [3,4] en thermoconvection, et étendu dans [7] au cas de l'électroconvection, notons V le vecteur d'état local du nématique en thermoconvection, qui comprend la température réduite θ , les composantes n_y et n_z du directeur³, et deux potentiels f et g de vitesse⁴. Les équations de

¹Au sens où son seuil d'excitation *linéaire* $\epsilon_0(\mathbf{k})$ reste très inférieur à 1.

²Ou « *bimodal varicose* ».

³Cf. l'équation (1.13).

⁴Le potentiel « *poloïdal* » f et le potentiel « *toroïdal* » g tels que le champ de vitesse soit

$$\mathbf{v} = \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(f\hat{\mathbf{z}})) + \mathbf{rot}(g\hat{\mathbf{z}}) .$$

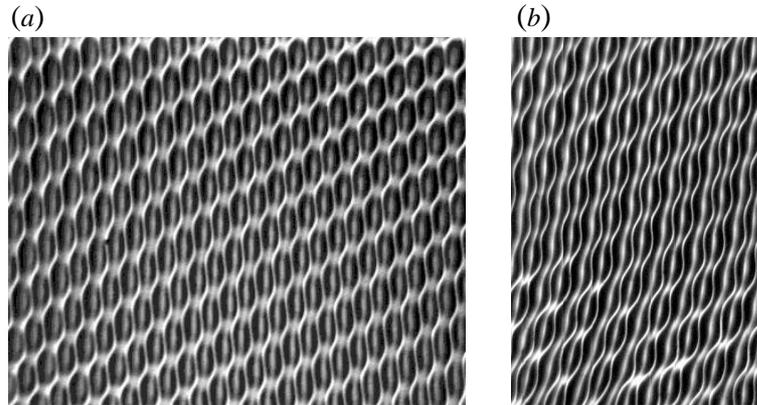


Fig. 2.1 – (a) : *Bimodal variquex* observé en *électroconvection* du nématique Phase 5, à basse fréquence et en lumière extraordinaire. (b) : *Bimodal variquex* observé en *thermoconvection* du MBBA, à champ magnétique faible et en lumière extraordinaire (pour plus de détails consulter la légende de la figure 11 de [5]). Dans les deux cas le mode dominant « A » est du type « zag ».

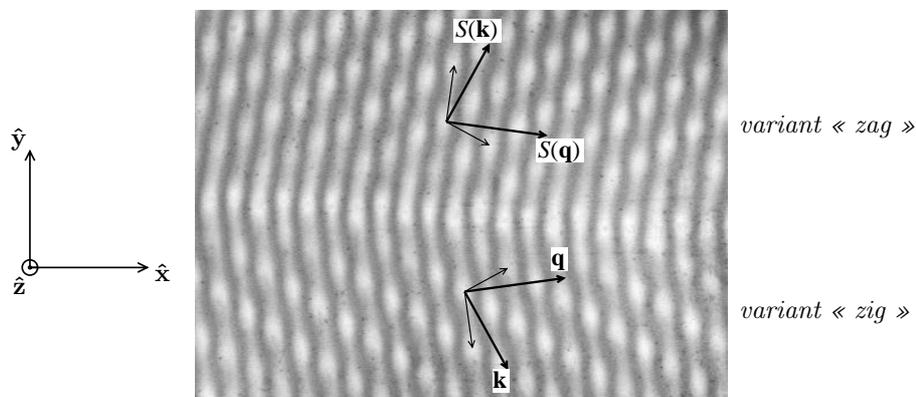


Fig. 2.2 – *Bimodaux variquex* observées en thermoconvection du 5CB et en lumière ordinaire (voir encore la légende de la figure 11 de [5]). Les flèches minces représentent les vecteurs de base des réseaux directs correspondants, et les flèches épaisses les vecteurs de base des réseaux réciproques correspondants. Sur cette photographie on a la chance d’observer un domaine où le mode dominant « A », de vecteur d’onde \mathbf{q} ou $S(\mathbf{q})$, est du type « zig » dans la partie inférieure du champ et « zag » dans sa partie supérieure, S étant la symétrie $y \mapsto -y$.

la thermonémathydrodynamique de la partie non homogène en x, y de V prennent la forme

$$D(\partial_t V) = L(V) + N_2(V, V) + N_3(V, V, V) + t.o.s. \quad (2.3)$$

où D et L sont deux opérateurs différentiels linéaires, N_2 et N_3 sont des opérateurs différentiels non linéaires, respectivement quadratique et cubique. Par résolution du problème linéaire

$$\sigma D(V_1) = L(V_1), \quad (2.4)$$

on calcule le mode normal associé aux rouleaux obliques initiaux

$$V_1(\mathbf{q}) = \left(\tilde{\theta}(z; \mathbf{q}), \tilde{n}_y(z; \mathbf{q}), \tilde{n}_z(z; \mathbf{q}), \tilde{f}(z; \mathbf{q}), \tilde{g}(z; \mathbf{q}) \right) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) \quad (2.5a)$$

et celui associé à un mode zag candidat pour être le dual

$$V_1(\mathbf{k}) = \left(\tilde{\theta}(z; \mathbf{k}), \tilde{n}_y(z; \mathbf{k}), \tilde{n}_z(z; \mathbf{k}), \tilde{f}(z; \mathbf{k}), \tilde{g}(z; \mathbf{k}) \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (2.5b)$$

Partant de la superposition bimodale

$$V_{actifs} = AV_1(\mathbf{q}) + BV_1(\mathbf{k}) + c.c., \quad (2.6)$$

on calcule ensuite par élimination quasi statique les modes quadratiques engendrés. On obtient ainsi les contributions quadratiques

$$\begin{aligned} V_{passifs} = & |A|^2 V_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) + [A^2 V_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + c.c.] + |B|^2 V_2(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) + [B^2 V_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}) + c.c.] \\ & + [ABV_2(\mathbf{q}, \mathbf{k}) + c.c.] + [A^* B V_2(-\mathbf{q}, \mathbf{k}) + c.c.] \end{aligned} \quad (2.7)$$

où par exemple

$$V_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) = (\theta^H(z; \mathbf{q}), n_y^H(z; \mathbf{q}), 0, 0, 0) \quad (2.8a)$$

est le mode homogène quadratique associé aux rouleaux obliques initiaux⁵,

$$\begin{aligned} V_2(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = & (\theta^I(z; \mathbf{q}, \mathbf{k}), n_y^I(z; \mathbf{q}, \mathbf{k}), n_z^I(z; \mathbf{q}, \mathbf{k}), f^I(z; \mathbf{q}, \mathbf{k}), g^I(z; \mathbf{q}, \mathbf{k})) \\ & \exp[i(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}] \end{aligned} \quad (2.8b)$$

est le mode inhomogène associé aux modes $V_1(\mathbf{q})$ et $V_1(\mathbf{k})$. À l'ordre cubique en les amplitudes A et B , il faut finalement évaluer la rétroaction de V_p sur ces amplitudes ; pour cela on projette (2.3) sur les modes adjoints $U_1(\mathbf{q})$ et $U_1(\mathbf{k})$ à l'aide d'un produit scalaire convenable⁶ $(V, U) \mapsto \langle V, U \rangle$. On obtient, suite à une renormalisation des modes normaux et des amplitudes⁷, deux équations d'amplitudes couplées

$$\boxed{\begin{cases} \tau_{\mathbf{q}} \partial_t A = \epsilon A - |A|^2 A - g_{\mathbf{k}\mathbf{q}} |B|^2 A \\ \tau_{\mathbf{k}} \partial_t B = (\epsilon - \epsilon_0(\mathbf{k})) B - |B|^2 B - g_{\mathbf{q}\mathbf{k}} |A|^2 B \end{cases}}. \quad (2.9)$$

⁵Dont la composante n_y a été discutée section 1.1.3!

⁶Cf l'équation (4.6) de [4], en prenant garde au fait que j'utilisais alors une convention différente symétrique. Notez aussi que les modes adjoints doivent être convenablement normalisés...

⁷Donnée par l'équation (4.9) de [4].

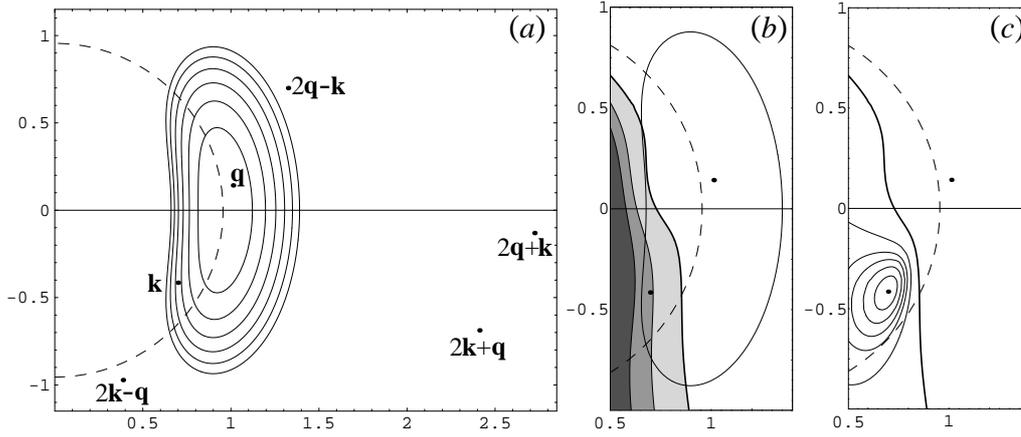


Fig. 2.3 — Pour la thermoconvection du 5CB à champ magnétique nul, dans le plan des vecteurs d'ondes. (a) : Géométrie du bimodal variatiqueux calculé à partir du modèle (2.9) pour un vecteur d'onde de rouleaux obliques typique \mathbf{q} . Le demi-cercle en pointillé a pour rayon le nombre d'onde critique q_c . Le vecteur d'onde dual calculé \mathbf{k} est montré, ainsi que les vecteurs d'ondes des modes harmoniques qui pourraient être actifs du fait de leur symétrie « paire » sous $z \mapsto -z$. Ces modes sont passifs car situés en dehors de la région « active » $\epsilon_0(\mathbf{k}) \ll 1$, montrée par les lignes $\epsilon_0 = 0.06, 0.12, \dots, 0.36$. (b) : Lignes de niveau 1 (ligne épaisse), 0 et -1 (lignes fines) du coefficient de couplage $g_{\mathbf{q}\mathbf{k}}$ dans la région active. (c) : Lignes de niveau 0.194, 0.205, 0.22, 0.24, 0.30 (lignes fines) et $+\infty$ (ligne épaisse) de $\epsilon_V(\mathbf{q}; \mathbf{k})$ dans cette même région. Figure tirée de [4].

Dans ces équations, $\tau_{\mathbf{q}}$ (resp. $\tau_{\mathbf{k}}$) est le temps caractéristique d'excitation du mode \mathbf{q} (resp. \mathbf{k}), $\epsilon_0(\mathbf{k})$ est le seuil d'excitation linéaire du mode \mathbf{k} , $g_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ et $g_{\mathbf{q}\mathbf{k}}$ sont les coefficients de couplages non linéaires entre ces deux modes ; par exemple

$$\boxed{g_{\mathbf{q}\mathbf{k}} = -\tau_{\mathbf{k}} \langle T_{\mathbf{q}\mathbf{k}}, U_1(\mathbf{k}) \rangle} \quad (2.10a)$$

avec

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{q}\mathbf{k}} &= N_2(V_1(-\mathbf{q})|V_2(\mathbf{q}, \mathbf{k})) + N_2(V_1(\mathbf{q})|V_2(-\mathbf{q}, \mathbf{k})) + N_2(V_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q})|V_1(\mathbf{k})) \\ &+ N_3(V_1(\mathbf{q})|V_1(-\mathbf{q})|V_1(\mathbf{k})) \end{aligned} \quad (2.10b)$$

les contributions résonantes de vecteur d'onde \mathbf{k} dans les termes non linéaires de (2.3), en notant

$$N_2(a|b) = N_2(a, b) + N_2(b, a), \quad (2.10c)$$

$$\begin{aligned} N_3(a|b|c) &= N_3(a, b, c) + N_3(a, c, b) + N_3(b, a, c) \\ &+ N_3(c, a, b) + N_3(b, c, a) + N_3(c, b, a). \end{aligned} \quad (2.10d)$$

La solution du modèle (2.9) où le mode \mathbf{q} est seul,

$$A = \sqrt{\epsilon} \quad \text{et} \quad B = 0, \quad (2.11)$$

perd sa stabilité vis-à-vis d'un mode \mathbf{k} lorsque $g_{\mathbf{q}\mathbf{k}} < 1$ et ϵ dépasse

$$\boxed{\epsilon_V(\mathbf{q}; \mathbf{k}) = \frac{\epsilon_0(\mathbf{k})}{1 - g_{\mathbf{q}\mathbf{k}}}}. \quad (2.12)$$

Le dual de \mathbf{q} est alors défini comme le vecteur d'onde \mathbf{k} qui minimise ce seuil d'instabilité secondaire. La figure 2.3 montre que ce modèle est qualitativement correct, puisque si \mathbf{q} est

du type zig on prédit l'existence de modes « dangereux » correspondant à un coefficient de couplage $g_{\mathbf{qk}} < 1$ dans la région zag (figure 2.3b), et c'est effectivement là que se trouve le dual \mathbf{k} (figure 2.3c).

Le grand intérêt du modèle (2.9), relativement peu précis d'un point de vue quantitatif puisque les approximations faiblement non linéaires ne sont pas très bonnes⁸, est qu'il montre une tendance robuste à une sélection du dual du même type que celle observée expérimentalement, tout en reposant sur des calculs *semi-analytiques*. Ainsi **le coefficient de couplage $g_{\mathbf{qk}}$** (2.10a), comme tout coefficient non linéaire, **est décomposable en somme de termes élémentaires** dûs à chaque terme non linéaire dans chaque équation de la dynamique (2.3) et aux 6 combinaisons de modes qui apparaissent dans $T_{\mathbf{qk}}$: chaque terme quadratique contribue 6 fois et chaque terme cubique 6 fois. À cette complexité caractéristique de tout phénomène non linéaire, qui implique en général la création d'harmoniques et donc l'interaction d'un grand nombre de modes, se rajoute ici la complexité des équations de base, riches en non-linéarités à cause de la nature géométrique du champ \mathbf{n} (cf. l'équation 1.13). Ainsi plus de 3000 termes contribuent à $g_{\mathbf{qk}}$. En traçant un diagramme avec en abscisse un indice de terme et en ordonnée la valeur de sa contribution à $g_{\mathbf{qk}}$ on peut mettre en évidence les termes non linéaires et les couplages importants, cf. la partie supérieure de la figure 2.4. Les contributions des non-linéarités de l'équation de la dynamique du potentiel de vitesse g , négligeables comme celles de l'équation de n_y , ne sont pas montrées. On constate que beaucoup de termes contribuent à expliquer la valeur très négative du coefficient de couplage $g_{\mathbf{qk}}$: la complexité intrinsèque de ce problème non linéaire fait que *plusieurs mécanismes contribuent à l'instabilité bimodale*. *A contrario*, on peut expliquer « simplement » la *sélection du dual* dans le demi-plan « zag » si \mathbf{q} est « zig », en analysant pourquoi $g_{\mathbf{qk}}$ est beaucoup plus négatif que (voire de signe opposé à) $g_{\mathbf{qS}(\mathbf{k})}$ où $S(\mathbf{k})$ est le vecteur d'onde zig symétrique de \mathbf{k} , c'est-à-dire en formant le diagramme des contributions à

$$\delta g_{\mathbf{qk}} = g_{\mathbf{qk}} - g_{\mathbf{qS}(\mathbf{k})} < 0 . \quad (2.13)$$

Ce diagramme, montré sur la partie inférieure de la figure 2.4, met effectivement en évidence deux contributions (fléchées) très négatives à $\delta g_{\mathbf{qk}}$, qui sont étudiées en détail dans [4] (cf. les équations 7.6 et 7.7 de cet article, et la discussion qui s'ensuit). De façon plus concise, le point commun entre ces deux contributions est qu'elles sont dues à des non-linéarités du terme

$$N_2(V_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q})|V_1(\mathbf{k}))$$

de $T_{\mathbf{qk}}$ (2.10b), qui expriment la rétroaction du mode moyen de directeur $n_y^H(z; \mathbf{q})$ (1.14) et du mode linéaire $V_1(\mathbf{k})$ sur l'amplitude B . De plus, ces non-linéarités correspondent à des corrections des termes linéaires qui traduisent le mécanisme de focalisation de la chaleur expliqué section 1.1.1. Ainsi, de même que ce mécanisme explique la préférence, au seuil de l'instabilité primaire, pour des rouleaux « normaux » de vecteur d'onde parallèle au directeur moyen

$$\langle \mathbf{n} \rangle_{xy} = \mathbf{n} = \hat{\mathbf{x}}$$

⁸Par exemple pour le cas étudié figure 2.3 on prédit $\epsilon_{\text{VH}} = 0.19$ au lieu de la valeur de 0.28 observée expérimentalement, cf. [4,5].

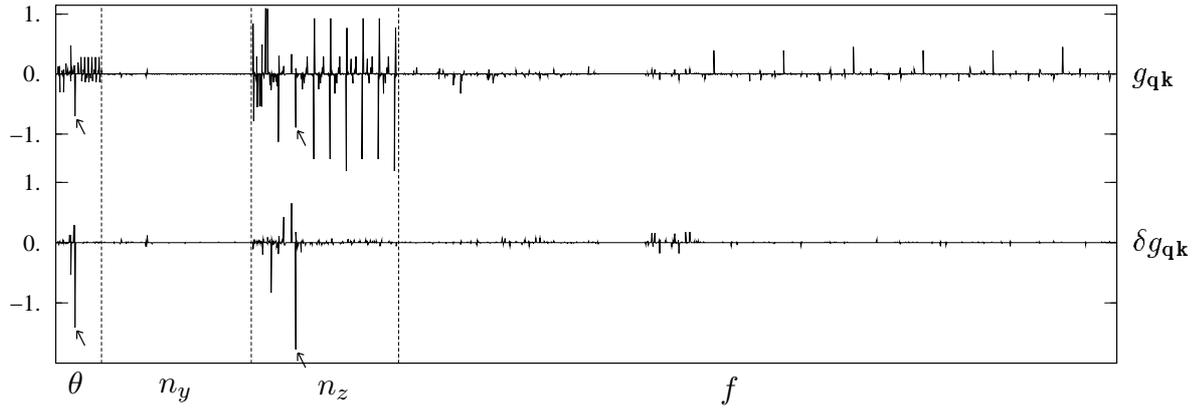


Fig. 2.4 – Analyse du coefficient de couplage $g_{\mathbf{qk}}$ du modèle (2.9) pour la thermoconvection du 5CB à champ magnétique nul. En abscisse : les indices des termes (non linéaires) contribuant à $T_{\mathbf{qk}}$ (2.10b) donc $g_{\mathbf{qk}}$ (2.10a); tout d'abord ceux de l'équation de la chaleur (θ est la température réduite), puis ceux des équations de la dynamique de n_y et n_z , enfin ceux de l'équation de la dynamique du potentiel de vitesse f . En ordonnée : dans la partie supérieure du diagramme les contributions correspondantes à $g_{\mathbf{qk}}$; dans la partie inférieure les contributions correspondantes à $\delta g_{\mathbf{qk}}$ (2.13). Figure tirée de [3].

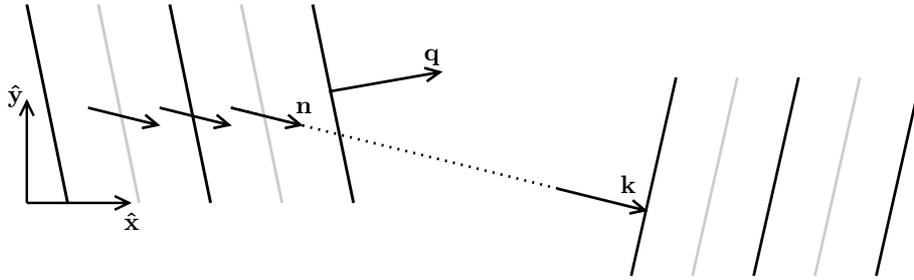


Fig. 2.5 – Schéma récapitulant le mécanisme de sélection (2.15) : dans des rouleaux obliques de vecteur d'onde \mathbf{q} « zig », le directeur moyen (2.14) tourne dans la direction de l'axe des rouleaux d'après le mécanisme analysé section 1.1.3. Un nouveau mode de rouleaux de vecteur d'onde \mathbf{k} « zag » approximativement parallèle à ce directeur moyen est alors excité par le mécanisme primaire de focalisation de la chaleur.

dans la configuration de base, de même ce mécanisme explique la préférence, au seuil de l'instabilité secondaire bimodale, pour un nouveau système de rouleaux de vecteur d'onde approximativement parallèle au directeur moyen

$$\langle \mathbf{n} \rangle_{xy} = \hat{\mathbf{x}} + n_y^H(z; \mathbf{q}) \hat{\mathbf{y}} + t.o.s. \quad (2.14)$$

dans les rouleaux obliques \mathbf{q} (cf. la figure 2.5). En d'autres termes le critère de sélection du vecteur d'onde dual⁹ est

$$\boxed{k_y n_y^H(z; \mathbf{q}) > 0 \quad \text{i.e.} \quad k_y q_y < 0} \quad (2.15)$$

à cause de (1.14); c'est bien le critère mis en évidence expérimentalement sur la figure 2.2.

⁹ $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}}$ avec k_x toujours positif par convention.

Ainsi l'origine physique de la sélection du vecteur d'onde dual est le fait que *le vecteur d'onde des rouleaux préfère être colinéaire au directeur* moyen pour assurer une meilleure focalisation de la chaleur, au sens du mécanisme complet décrit sur la figure 1.1. Ce mécanisme vaut aussi en électroconvection pour la focalisation des charges, comme expliqué dans [7], avec un modèle un peu plus sophistiqué cependant, qui considère le mode de torsion n_y^H actif; en conséquence le mécanisme décrit ici est composé de deux étapes, « \mathbf{q} excite n_y^H », puis « n_y^H excite \mathbf{k} », le coefficient de couplage important étant maintenant $\beta_2(\mathbf{k})$, cf. les sections IV.C et VI.B de [7].

Au delà de son application à ces systèmes, l'intérêt de *la méthode d'analyse d'un coefficient non linéaire par diagramme des contributions élémentaires* proposée ici est qu'elle *est générale*. Elle est par exemple utilisée dans [4] pour étudier précisément les mécanismes de saturation ou d'anti-saturation des rouleaux en thermoconvection des nématiques, voir la figure 1 de cet article et la discussion correspondante.

Avant de donner un autre exemple d'application de cette méthode, il importe de mentionner que tous nos calculs faiblement non linéaires, tels ceux qui ont mené au modèle (2.9), ne sont pas *stricto sensu* le résultat de l'application de méthodes asymptotiques multiéchelles. Ainsi, dans la solution bimodale du modèle (2.9),

$$|A| = \sqrt{\epsilon - r g_{\mathbf{k}\mathbf{q}}(\epsilon - \epsilon_V)}, \quad |B| = \sqrt{r(\epsilon - \epsilon_V)} \quad (2.16)$$

avec $r = (1 - g_{\mathbf{q}\mathbf{k}})/(1 - g_{\mathbf{q}\mathbf{k}}g_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$, les amplitudes A et B sont d'un ordre différent. Ceci explique que j'ai parlé de méthodes « *perturbatives* » et non « *multiéchelles* » dans la première page de mon introduction; pour une présentation générale¹⁰ de ces méthodes « *perturbatives* », qui supposent les amplitudes A et B « *petites* » et « *lentement variables* » sans plus de précisions, je vous renvoie à l'annexe B de [7].

2.2 Modes de vitesse : saturation - antisaturation

Il semble intéressant d'analyser, avec la méthode précédente, la *nature sous-critique de l'instabilité de Tollmien-Schlichting de l'écoulement de Poiseuille plan*¹¹, pour laquelle il n'existe à ma connaissance pas d'explication claire dans la littérature. Cette nature sous-critique a été établie, dans le cas d'un système à *débit fixé*, par Reynolds & Potter (1967). Ces auteurs ont proposé quelques éléments d'interprétation basés sur une réécriture énergétique du coefficient d'anti-saturation, elle-même établie par Stuart (1960). Ils insistent donc sur l'importance d'une « *distorsion de la fonction courant fondamentale* », qui rétroagirait sur l'amplitude de l'onde, sans donner cependant d'explication plus précise.

Dans le cas d'un système à *pertes de charge fixées*, c'est Herbert (1980) qui a calculé le premier le coefficient d'anti-saturation, mais sans expliquer pourquoi celui-ci est positif.

¹⁰Dans le cas d'instabilités primaires stationnaires; on peut néanmoins étendre certains résultats à celui d'instabilités primaires oscillantes.

¹¹Ces résultats, qui prolongent l'étude effectuée en 1.2, feront eux-aussi partie, je l'espère, d'une prochaine publication. Le but de cette section est aussi d'illustrer la nature des calculs faiblement non linéaires qui sont ma « tasse de thé » dans un contexte moins lourd que celui de la thermonématohydrodynamique...

De mon côté j'ai calculé directement¹² une solution faiblement non linéaire du problème où l'écoulement de base est augmenté de

$$\mathbf{v} = (\partial_y \psi) \hat{\mathbf{x}} - (\partial_x \psi) \hat{\mathbf{y}} = u \hat{\mathbf{x}} + v \hat{\mathbf{y}} \quad (2.17)$$

avec

$$\psi = [A \psi_1(q) + c.c.] + |A|^2 \psi_2(q, -q) + [A^2 \psi_2(q, q) + c.c.] + t.o.s. \quad (2.18)$$

Dans cette équation

$$\psi_1(q) = \Psi_1(y) \exp[i(qx - \omega t)] \quad (2.19)$$

est le mode linéaire correspondant à l'onde de Tollmien-Schlichting critique, Ψ_1 étant la fonction courant complexe caractérisée section 1.2.2, normalisée par la condition

$$\Psi_1(0) = 1 ,$$

$\psi_2(q, -q)$ et $\psi_2(q, q)$ sont les modes esclaves calculés par élimination quasi statique. Le premier est le mode moyen étudié section 1.2.3,

$$\psi_2(q, -q) = \Psi_H(y) = \begin{cases} \int_{-1}^y u_H(y') dy' & \text{en conditions de pertes de charge fixées,} \\ \int_{-1}^y \tilde{u}_H(y') dy' & \text{en conditions de débit fixé,} \end{cases} \quad (2.20a)$$

le second est le mode inhomogène engendré par les termes non linéaires de l'équation de la vorticité en $\psi_1(q)^2$,

$$\psi_2(q, q) = \Psi_I(y) \exp[2i(qx - \omega t)] . \quad (2.20b)$$

En adimensionnel¹³, cette équation de la vorticité $\zeta = -\Delta\psi$ prend la forme

$$\partial_t \zeta = Re^{-1} \Delta \zeta - u_0 \partial_x \zeta - v \partial_y \zeta_0 + N_2(\psi, \psi) \quad (2.21a)$$

avec Re le nombre de Reynolds, $u_0 = 1 - y^2$ l'écoulement de base, $\zeta_0 = -u'_0$ la vorticité de base,

$$N_2(\psi, \psi) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \zeta = \underbrace{-u \partial_x \zeta}_{N_{21}(\psi, \psi)} + \underbrace{-v \partial_y \zeta}_{N_{22}(\psi, \psi)} \quad (2.21b)$$

les termes non linéaires d'advection¹⁴. Grâce au produit scalaire naturel¹⁵

$$(\psi, \psi_a) \mapsto \langle \psi, \psi_a \rangle = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\lambda \int_{-1}^1 \psi \psi_a^* dx dy , \quad (2.22)$$

¹²Sans utiliser une formulation énergétique.

¹³R p tons comme dans la note 26 page 34 du chapitre précédent que nous utilisons de façon standard h comme unité de longueur, U_0 comme unité de vitesse, et ρU_0^2 comme unité de densité d'énergie.

¹⁴Seuls les termes non linéaires strictement homogènes en x peuvent être r -exprimés en fonction de contraintes de Reynolds (moyennes !) du type (1.28). Comme je vais plutôt m'intéresser ici aux termes non linéaires de nombre d'onde q , je garde l'expression de ceux-ci (2.21b), d'une interprétation physique « directe », sans chercher à faire apparaître des « contraintes de Reynolds modulées ».

¹⁵Dans ce qui suit on ne considère pour simplifier que des champs de période spatiale égale à la période critique $\lambda = 2\pi/q$.

on peut définir les opérateurs adjoints et le mode critique adjoint

$$\Psi_a(y) \exp[i(qx - \omega t)] \quad (2.23)$$

normalisé de sorte que

$$\langle -\Delta\psi_1(q), \Psi_a(y) \exp[i(qx - \omega t)] \rangle = 1 .$$

La projection de l'équation de la vortacité (2.21a) sur ce mode adjoint donne alors l'équation d'amplitude

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1 + ic_0}{\tau} \epsilon A + g(1 + ic_3)|A|^2 A} . \quad (2.24)$$

Dans cette équation le paramètre de contrôle réduit

$$\epsilon = \frac{Re}{Re_c} - 1 , \quad (2.25)$$

le temps caractéristique τ et le coefficient de décalage en fréquence linéaire c_0 se déduisent d'un développement limité de la valeur propre critique près du seuil¹⁶, et enfin le coefficient d'*anti-saturation* g et le coefficient de décalage en fréquence non linéaire c_3 sont donnés par la projection des termes de $N_2(\psi, \psi)$ résonants, i.e. en $\exp[i(qx - \omega t)]$, sur le mode adjoint,

$$g(1 + ic_3) = \langle N_2(\psi_1(-q)|\psi_2(q, q)) + N_2(\psi_1(q)|\psi_2(q, -q)), \Psi_a(y) \exp[i(qx - \omega t)] \rangle \quad (2.26)$$

en faisant encore usage des notations (2.10c). On peut donc analyser l'origine du signe positif de

$$\boxed{g = \text{Re} \langle N_2(\psi_1(-q)|\psi_2(q, q)) + N_2(\psi_1(q)|\psi_2(q, -q)), \Psi_a(y) \exp[i(qx - \omega t)] \rangle} \quad (2.27)$$

par la méthode introduite section 2.1.2.

On obtient ainsi, en *condition de pertes de charge fixées*, le diagramme de la figure 2.6. Étant donné le très faible nombre de termes impliqués, on peut aussi donner le résultat sous la forme de la table 2.1. La somme de ces contributions donne bien, en accord¹⁷ avec le résultat de Herbert (1980),

$$g = +29.704 . \quad (2.28)$$

¹⁶En particulier $\tau = 102.97$ indique une instabilité « peu violente » puisque les taux de croissance ϵ/τ correspondants sont petits.

¹⁷À 0.05% près, puisque Herbert (1980) donne, dans sa table 1, $g = a_1 = +29.69$.

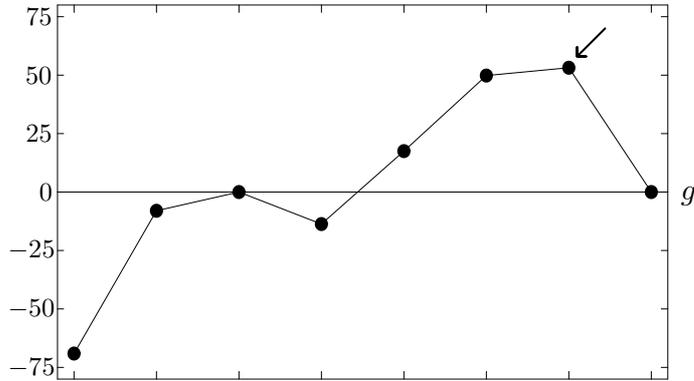


Fig. 2.6 – En condition de pertes de charge fixées, diagramme des 8 contributions élémentaires au coefficient d'anti-saturation de l'onde de Tollmien-Schlichting critique (2.27). La contribution positive la plus grande g_{dom} est fléchée.

Contributions dues au terme $N_{21} = -u \partial_x \zeta$:

Couple de modes	$\psi_1(-q), \psi_2(q, q)$	$\psi_2(q, q), \psi_1(-q)$	$\psi_1(q), \psi_2(q, -q)$	$\psi_2(q, -q), \psi_1(q)$
Contribution à g	-69.084	-8.008	0	-13.694

Contributions dues au terme $N_{22} = -v \partial_y \zeta$:

Couple de modes	$\psi_1(-q), \psi_2(q, q)$	$\psi_2(q, q), \psi_1(-q)$	$\psi_1(q), \psi_2(q, -q)$	$\psi_2(q, -q), \psi_1(q)$
Contribution à g	+17.501	+49.821	+53.169	0

Tab. 2.1 – En condition de pertes de charge fixées, détail des différentes contributions au coefficient d'anti-saturation de l'onde de Tollmien-Schlichting critique (2.27) ; $\psi_1(q)$ désigne le mode primaire de petite échelle (2.19), $\psi_1(-q)$ son complexe conjugué, $\psi_2(q, -q)$ le mode moyen (2.20a), $\psi_2(q, q)$ le mode harmonique de petite échelle (2.20b). La contribution positive la plus grande est celle due à $N_{22}(\psi_1(q), \psi_2(q, -q))$, $g_{dom} = +53.168$.

Le mécanisme dominant à l'origine de l'anti-saturation est, d'après la figure 2.6 et la table 2.1, celui exprimé par le terme $N_{22}(\psi_1(q), \psi_2(q, -q))$ qui décrit l'advection, par le champ de vitesse transverse v_1 du mode linéaire, de la vorticité de l'écoulement moyen u_H   l'ordre quadratique (représenté figure 2.7a),

$$\zeta_H = -u'_H = Re_c \tau_{xy} = -2Re_c E_{cy} x'_0 \quad (2.29)$$

d'après les r sultats¹⁸ de la section 1.2.3. En vertu de la courbe tiretée de la figure 1.12b, reproduite ici figure 2.7b, c'est dans les couches limites que cette vorticité est importante, positive dans la couche limite inférieure, négative dans la couche limite supérieure. C'est aussi dans ces couches limites que la « réceptivité » du système est grande, comme le montre la courbe du module de la fonction courant complexe adjointe¹⁹ figure 2.7c. Pour être plus précis, il convient de cerner les régions du domaine fluide dans lesquelles le terme intégré dans la contribution dominante à g ,

$$\begin{aligned} g_{dom} &= \text{Re} \langle N_{22}(\psi_1(q), \psi_2(q, -q)), \Psi_a(y) \exp[i(qx - \omega t)] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{Re}[(iq\Psi_1(y)) \zeta'_H(y) \Psi_a^*(y)] dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 S(y) dy, \end{aligned} \quad (2.30)$$

est positif et grand. Ceci est fait sur la figure 2.7d, qui montre que ce sont dans les régions des couches limites les plus proches du centre du canal, autour de $y_{\pm} = \pm 0.82$, que s'exerce la rétroaction positive. Gr ce à la figure 2.8, on peut voir qu'à des niveaux proches, en $y'_{\pm} = \pm 0.78$, la vorticité ζ_1 atteint des maxima et minima, mais ce en décalage vers la gauche par rapport aux régions où le terme non linéaire $-v_1 \partial_y \zeta_H$ atteint ses maxima et minima²⁰. Comme l'onde se propage vers la droite, on comprend que ce terme d'advection renforce celle-ci.

En **condition de débit fixé** la table 2.1 est modifiée en la table 2.2, qui donne un coefficient d'anti-saturation

$$\tilde{g} = +30.973 \quad (2.31)$$

en accord²¹ avec le calcul récent de Fujimura (1987). La table 2.2 montre que le mécanisme dominant contrôlant l'anti-saturation est encore l'advection par le champ de vitesse transverse v_{1y} du champ de vorticité moyen à l'ordre quadratique, cette fois-ci $\tilde{\zeta}_H = -\tilde{u}'_H$. Le fait que les

¹⁸Correctement adimensionnés.

¹⁹Le terme de « fonction de réceptivité » pour désigner le mode adjoint se justifie en considérant la réponse à une force extérieure volumique \mathbf{f} de l'amplitude A . En projetant l'équation de la vorticité ainsi perturbée

$$\partial_t \zeta = Re^{-1} \Delta \zeta - u_0 \partial_x \zeta - v \partial_y \zeta_0 + N_2(\psi, \psi) + \partial_x f_y - \partial_y f_x$$

sur le mode adjoint, on obtient en effet en régime linéaire

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1 + ic_0}{\tau} \epsilon A + F$$

avec

$$F = \langle \partial_x f_y - \partial_y f_x, \Psi_a(y) \exp[i(qx - \omega t)] \rangle = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\lambda \int_{-1}^1 (\partial_x f_y - \partial_y f_x) \Psi_a^*(y) \exp[-i(qx - \omega t)] dx dy.$$

²⁰Notez qu'au niveau de y_{\pm} , $-\partial_y \zeta_H > 0$.

²¹  0.04% près, puisque Fujimura (1987) donne, dans sa table I, $\tilde{g} = \lambda_{1r} = +30.962$.

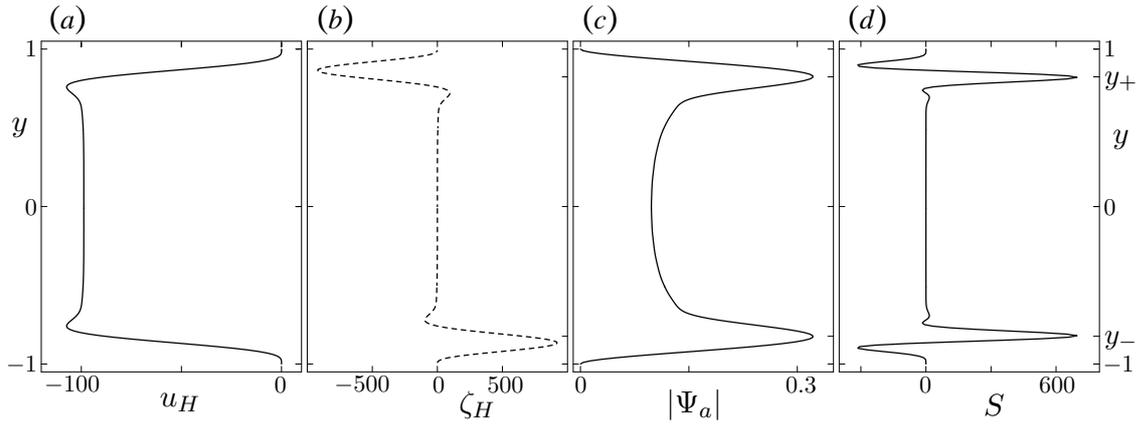


Fig. 2.7 – En condition de pertes de charge fixées. (a) : Écoulement moyen $u_H(y)$. (b) : Vorticité correspondante $\zeta_H(y)$ (2.29). (c) : Fonction $|\Psi_a(y)|$ caractérisant la « réceptivité » en vorticité du mode critique. (d) : Terme $S(y)$ de rétroaction local, partie réelle du produit du terme non linéaire $N_{22}(\psi_1(q), \psi_2(q, -q))$ par la « fonction de réceptivité » $\Psi_a^*(y) \exp[i(qx - \omega t)]$, cf. l'équation (2.30). Les ordonnées y_{\pm} signalent les maxima de $S(y)$.

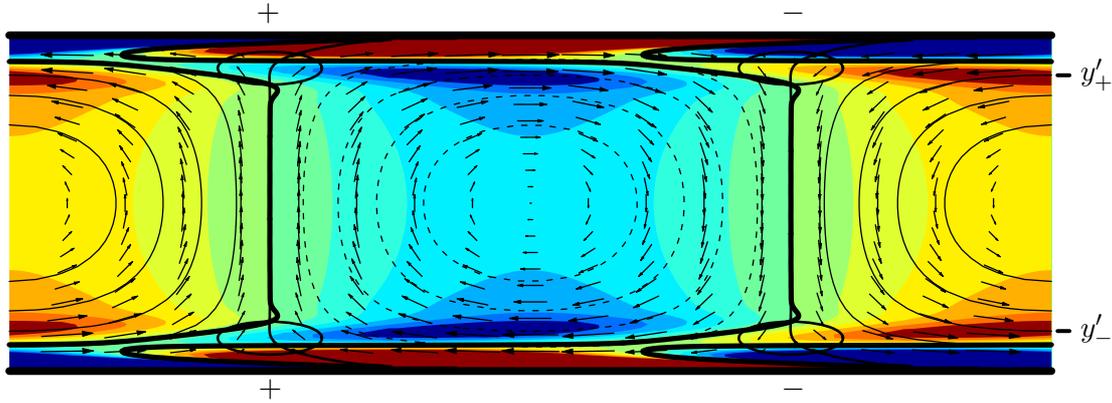


Fig. 2.8 – Caractérisation du champ de vitesse (flèches) de l'onde de Tollmien-Schlichting critique (1.30) : lignes de courant $\psi_1 > 0$ en traits fins, $\psi_1 < 0$ en traits fins tiretés, $\psi_1 = 0$ en trait d'épaisseur moyenne. Les niveaux de couleur caractérisent le champ de vorticité $\zeta_1 = -\Delta\psi_1$, la ligne épaisse représentant le niveau $\zeta_1 = 0$, les ordonnées y'_{\pm} signalant la position des maxima et minima « intérieurs » de ζ_1 . Les ellipses centrées en $(x, y) = (0, y_{\pm})$ et $(\lambda/2, y_{\pm})$ montrent les régions où le terme non linéaire $-v_1\partial_y\zeta_H$ est grand en valeur absolue ; au-dessus ou au-dessous le signe de ce terme est montré.

Contributions dues au terme $N_{21} = -u \partial_x \zeta$:

Couple de modes	$\psi_1(-q), \psi_2(q, q)$	$\psi_2(q, q), \psi_1(-q)$	$\psi_1(q), \psi_2(q, -q)$	$\psi_2(q, -q), \psi_1(q)$
Contribution à \tilde{g}	-69.084	-8.008	0	-10.925

Contributions dues au terme $N_{22} = -v \partial_y \zeta$:

Couple de modes	$\psi_1(-q), \psi_2(q, q)$	$\psi_2(q, q), \psi_1(-q)$	$\psi_1(q), \psi_2(q, -q)$	$\psi_2(q, -q), \psi_1(q)$
Contribution à \tilde{g}	+17.501	+49.821	+51.667	0

Tab. 2.2 – En condition de débit fixé, détail des différentes contributions au coefficient d'anti-saturation de l'onde de Tollmien-Schlichting critique.

contributions correspondantes à g et \tilde{g} soient très proches indique d'ailleurs que l'écoulement de Poiseuille qui fait la différence entre u_H et \tilde{u}_H (cf. l'équation 1.42) n'exerce qu'une rétroaction faible sur l'amplitude A : ainsi l'analyse présentée plus haut est encore pertinente dans ces conditions²²

En conclusion, la nature sous-critique de l'instabilité faiblement non linéaire de l'écoulement de Poiseuille plan est le résultat d'un processus en deux temps :

1. À l'ordre A^2 en l'amplitude de l'onde de Tollmien-Schlichting critique, les contraintes de Reynolds engendrées par les variations rapides du champ de vitesse de cette onde dans les couches limites engendrent un écoulement moyen u_H ou \tilde{u}_H qui varie lui aussi très rapidement dans ces couches limites.
2. Par advection, par l'onde elle-même, du champ de vortacité moyen correspondant ζ_H ou $\tilde{\zeta}_H$ dans ces couches limites, il y a à l'ordre A^3 amplification du champ de vortacité de cette onde.

« Avec les mains », on peut dire que les écoulements moyens u_H ou \tilde{u}_H correspondent à des corrections de l'écoulement de base $u_0 = 1 - y^2$ qui sont beaucoup plus instables que celui-ci car beaucoup plus cisailés, et ce de façon non monotone, comme en témoigne le fait qu'ils admettent chacun quatre points d'inflexion. En non-linéaire, lorsque ces corrections deviennent « importantes », il est donc naturel que l'instabilité linéaire de l'écoulement de base soit renforcée ; on peut même suggérer que les critères d'instabilité non visqueuse de Rayleigh et Fjørtoft s'appliquent aux profils d'écoulements u_H et \tilde{u}_H et « expliquent » leur instabilité qui serait du type « instabilité inflexionnelle »²³.

²²Plus précisément on peut montrer que

$$\tilde{g} - g = -\frac{3}{2\tau} \langle u_H \rangle_y ;$$

c'est donc le caractère « peu violent » de l'instabilité linéaire déjà remarqué dans la note 16 du bas de la page 46 qui explique la faible valeur de la différence $\tilde{g} - g$, i.e. la faiblesse de la rétroaction susmentionnée.

²³Les critères d'instabilité de Rayleigh et Fjørtoft sont présentés dans de nombreux traités, par exemple Drazin & Reid (1981) ; pour une présentation plus récente on peut consulter Huerre & Rossi (1998). On peut aussi noter que le fait qu'en non-linéaire une dynamique essentiellement « non visqueuse » domine est connu dans le domaine des écoulements ouverts cisailés, mais plutôt pour ce qui concerne les instabilités secondaires (« fortement non linéaires ») de ces écoulements.

Chapitre 3

Quand les modes moyens développent leur propre dynamique...

Jusqu'à maintenant les modes moyens ont été obtenus par élimination quasi statique et sont donc esclaves des modes de petite échelle. Il en est ainsi pour le mode de torsion du directeur en convection de cristaux liquides : dans le cas d'une structure bimodale du type (2.2), où

$$n_z = [A \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) + B \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + c.c.] f_{nz}(z) \hat{\mathbf{z}} + t.o.s. , \quad (3.1)$$

on prédit d'après (1.14) une rotation moyenne du directeur dans le plan horizontal

$$\langle n_y \rangle_{xy} = n_y^H(A) + n_y^H(B) = -(|A|^2 q_y + |B|^2 k_y) f_{ny}(z) . \quad (3.2)$$

Il en est de même pour les systèmes hydrodynamiques au sens large, dans lesquels les modes moyens de vitesse du type (1.22)

$$\langle \mathbf{v}_2 \rangle_x = |A|^2 u_H(y) \hat{\mathbf{x}} \quad (3.3)$$

et de pression du type (1.24)

$$\langle \partial_x \hat{p}_2 \rangle_x = |A|^2 G_H \quad (3.4)$$

sont clairement asservis à l'amplitude A du mode de petite échelle présent.

Le but de ce chapitre est de montrer deux exemples de phénomènes qui mettent en défaut cette approximation faiblement non linéaire d'élimination quasi statique, c'est-à-dire dans lesquels la dynamique propre des modes moyens joue un rôle primordial. Ces phénomènes relèvent tous deux de mon premier domaine de recherche, à savoir les convections de cristaux liquides nématiques. Je vais présenter pour chacun d'eux les faits expérimentaux, puis j'expliquerai en quoi les modèles faiblement non linéaires faillissent, et enfin je présenterai les modèles faiblement non linéaires *étendus* qui permettent de comprendre ces phénomènes.

3.1 Les structures bimodales deviennent oscillantes

3.1.1 Les bimodaux oscillants : des structures génériques en convections des nématiques

Lorsque l'on part d'un bimodal *varié* du type de ceux de la figure 2.1, et que l'on continue à augmenter le paramètre de contrôle principal ϵ - donné par (1.12) en thermoconvection, (2.1) en électroconvection -, on observe au delà d'un seuil secondaire ϵ_{HOPF} une **bifurcation de Hopf** qui correspond au développement d'une oscillation en opposition de phase des modules des amplitudes A et B dans

$$n_z = [A \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) + B \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + c.c.] f_{nz}(z) \hat{\mathbf{z}} + t.o.s. \quad (3.1)$$

Ce phénomène, que j'ai mis en évidence avec Luc Pastur à la toute fin de ma thèse [5], est montré sur la figure 3.1, obtenue en thermoconvection à $\epsilon = 0.5$. Il était « connu » en électroconvection, même si à ma connaissance aucune publication antérieure à celle de Dennin (2000) n'en fait état. En effet les expérimentateurs travaillant sur l'électroconvection ont plutôt rapportés des phénomènes d'oscillations se produisant dans des bimodaux *symétriques* dans lesquels les deux vecteurs d'ondes de base vérifient

$$\mathbf{k} = S(\mathbf{q}) \quad (3.5)$$

où S est le miroir $y \mapsto -y$. De telles structures sont obtenues à des valeurs élevées du paramètre ϵ , $\epsilon > \epsilon_{\text{SYM}} > \epsilon_{\text{HOPF}}$, et résultent d'une évolution plus ou moins progressive des vecteurs d'ondes \mathbf{q} et \mathbf{k} . Je les ai observées en thermoconvection : on peut revoir à ce sujet la figure 1.5, que complète la figure 3.2, réalisée à $\epsilon = 1.4$. La première mention et étude expérimentale de ces structures spatio-temporelles en électroconvection est due à Bolomey & Dimitropoulos (1976), dont la figure 3.3 est tirée¹. L'existence de ces structures en électroconvection a ensuite été confirmée par de nombreux auteurs, par exemple Joets & Ribotta (1986).

De même que celle des structures bimodales stationnaires, l'« universalité » des structures bimodales oscillantes surprend lorsque l'on rappelle que les mécanismes microscopiques à l'origine de la convection sont bien différents ; différents sont aussi les longueurs caractéristiques des systèmes, 1 mm dans le cas de la figure 3.2, 75 μm dans le cas de la figure 3.3, et les temps caractéristiques, plus de 20 minutes dans le cas de la figure 3.2, environ une seconde dans le cas de la figure 3.3...

Signalons enfin que ces oscillations de bimodal semblent persister « en toile de fond » jusqu'à des valeurs très importantes du paramètre ϵ , particulièrement dans le régime « turbulent » de « diffusion dynamique » (*'Dynamic Scattering Mode'* en anglais) de l'électroconvection², comme l'expliquent par exemple Joets & Ribotta (1986). Ainsi la bifurcation de Hopf décrite ici est une étape essentielle de la transition à la complexité spatio-temporelle de ces systèmes³.

¹La copie de leur article que je possède ne présente que des photographies de mauvaise qualité, ce qui explique que je préfère reproduire figure 3.3 leurs schémas. Les flèches indiquent le vecteur vorticités dans le plan médian dans chaque rouleaux. Le lecteur curieux pourra apprécier un modèle analytique du champ de vitesse de telles structures à la fin de [5] (voir aussi la figure 16 de cet article).

²Celui-là même que Heilmeier et al. (1968) ont proposé d'utiliser à des fins d'affichage...

³On peut aussi noter que ces oscillations ne se développent jamais de façon homogène dans l'espace, mais que

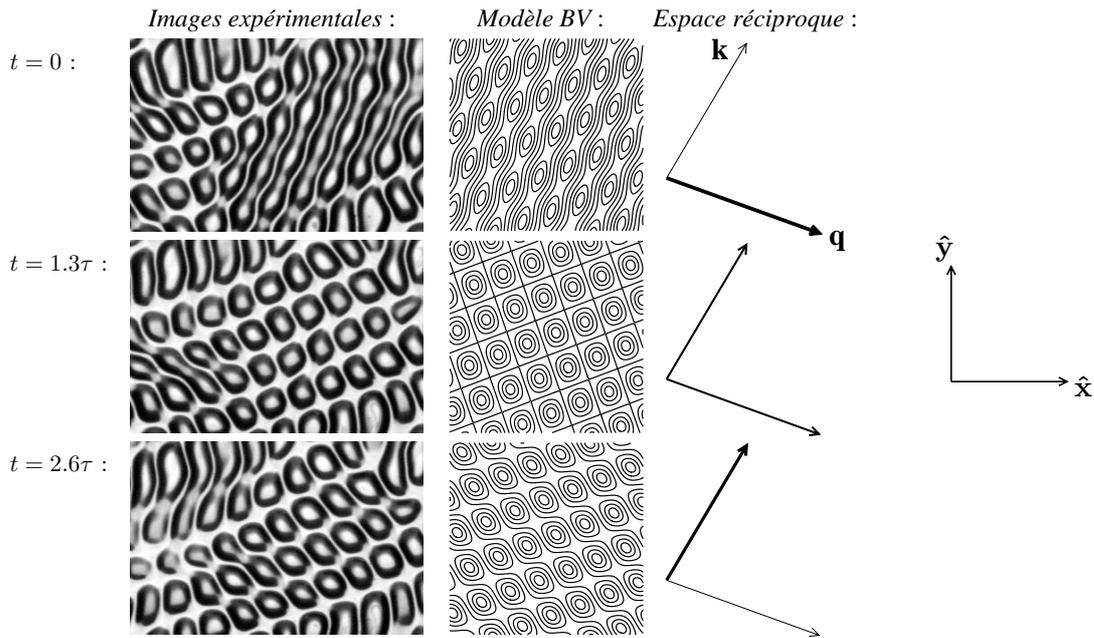


Fig. 3.1 – Séquence présentant une demi-période d'*oscillation d'un bimodal variqueux* en *thermoconvection* du MBBA à champ magnétique nul. La première colonne présente des photographies en lumière extraordinaire, la seconde les lignes d'iso-valeurs de n_z^2 reconstruites à partir du modèle (3.1) en faisant osciller en opposition de phase les amplitudes réelles A et B , la troisième les vecteurs d'ondes correspondants, plus ou moins épais selon les valeurs des amplitudes associées. L'intervalle de temps entre deux images est le temps caractéristique τ de l'instabilité, soit 22.5 min. Figure tirée de [5].

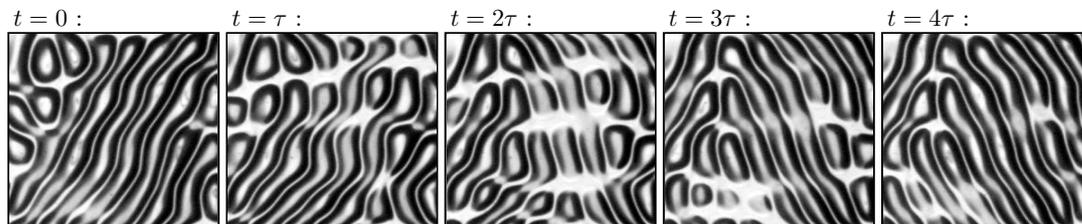


Fig. 3.2 – Séquence de photographies en lumière extraordinaire présentant une demi-période d'*oscillation d'un bimodal symétrique* en *thermoconvection* du MBBA à champ magnétique nul. Comme figure 3.1, $\tau = 22.5$ min. Figure tirée de [5].

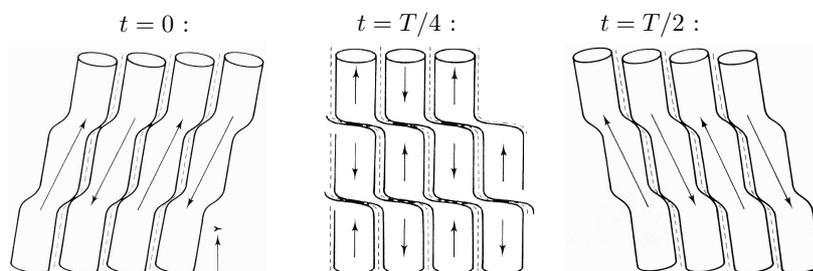


Fig. 3.3 – Schémas tirés de Bolomey & Dimitropoulos (1976) présentant, d'après les observations expérimentales de ces auteurs en *électroconvection* du MBBA à basse fréquence, une demi-période d'*oscillation d'un bimodal symétrique*. La période d'oscillation T est de l'ordre de 2 s.

3.1.2 La faillite du modèle faiblement non linéaire

Le modèle faiblement non linéaire (2.9),

$$\begin{cases} \tau_{\mathbf{q}} \partial_t A = \epsilon A - |A|^2 A - g_{\mathbf{kq}} |B|^2 A \\ \tau_{\mathbf{k}} \partial_t B = (\epsilon - \epsilon_0(\mathbf{k})) B - |B|^2 B - g_{\mathbf{qk}} |A|^2 B \end{cases}, \quad (3.6)$$

qui décrit de façon qualitativement correcte la bifurcation des rouleaux obliques de vecteur d'onde \mathbf{q} vers le bimodal variqueux de vecteurs d'ondes \mathbf{q} et \mathbf{k} (cf. la section 2.1.2), prédit par contre qu'au delà du seuil correspondant ϵ_V la solution bimodale *stationnaire* (2.16),

$$|A| = \sqrt{\epsilon - r g_{\mathbf{kq}}(\epsilon - \epsilon_V)}, \quad |B| = \sqrt{r(\epsilon - \epsilon_V)} \quad (3.7)$$

avec $r = (1 - g_{\mathbf{qk}})/(1 - g_{\mathbf{qk}}g_{\mathbf{kq}})$, est *stable* vis-à-vis de toute petite perturbation des amplitudes A et B . Des perturbations d'amplitude finie n'aideraient pas, puisque l'on peut démontrer mathématiquement qu'un système du type (3.6) n'admet *aucune solution oscillante*⁴.

3.1.3 Un modèle faiblement non linéaire *étendu* pour expliquer ces oscillations

Il convient donc d'abandonner l'approximation quasi statique qui a conduit à (3.2) et (3.6), et de développer une théorie faiblement non linéaire *étendue*. La bonne façon de le faire consiste à identifier un « mode lent » de directeur, mode propre de l'équation d'évolution de n_y linéarisée autour de la configuration planaire de base, soit, en ne considérant que des perturbations homogènes en x et y ,

$$\gamma_1 \partial_t n_y = k_{22} \partial_z^2 n_y \quad (3.8)$$

avec γ_1 la première viscosité rotationnelle et k_{22} la constante élastique de torsion. Munie des conditions limites d'ancrage planaire

$$n_y = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm h, \quad (3.9)$$

cette équation admet comme mode le plus lent

$$n_y = \cos[\pi z/(2h)] \quad (3.10)$$

correspondant à la valeur propre temporelle

$$\sigma_T = -k_{22}[\pi/(2h)]^2/\gamma_1. \quad (3.11)$$

On reconnaît dans (3.10) le *mode de torsion* du directeur représenté figure 1.6, qui est donc excité par des rouleaux obliques. Un point important est que le taux d'amortissement (3.11)

différents domaines correspondants à des phases différentes coexistent, séparés par des « parois » plus ou moins bien définies, voire par des « défauts ponctuels ». Cet aspect de la dynamique spatio-temporelle de ces oscillations a été étudié par Sano et al. (1992) et Janiaud et al. (1993).

⁴Plus précisément aucune solution où $|A|$ et $|B|$ sont des fonctions périodiques non constantes du temps. Ceci est dû au fait que les deux modes impliqués bifurquent de façon sur-critique, cf. par exemple Guckenheimer & Holmes (1983), qui donnent en fait dans leur section 7.5 les portraits de phase dans le plan $(|A|, |B|)$ (avec temps renversé, mais il suffit de changer le sens des flèches!) des diverses variantes possibles de (3.6).

de ce mode est, sauf très près du seuil de convection $\epsilon = 0$, proche du taux d'amplification des modes actifs rouleaux, taux d'amplification que l'on peut estimer par la formule approchée suivante⁵

$$\sigma = \{k_{11}[\pi/(2h)]^2 + k_{33}q_c^2\} \epsilon/\gamma_1 \quad (3.12)$$

où k_{11} (resp. k_{33}) est la constante élastique d'éventail (resp. courbure), $q_c \simeq \pi/(2h)$ est le nombre d'onde critique. Compte tenu des ordres de grandeur typiques

$$\frac{k_{11}}{k_{22}} \simeq 1.5 \quad \text{et} \quad \frac{k_{33}}{k_{22}} \simeq 1.9, \quad (3.13)$$

on obtient que le mode de torsion possède un taux d'amortissement du même ordre de grandeur que le taux d'amplification des modes de rouleaux lorsque

$$\left| \frac{\sigma_T}{\sigma} \right| \simeq \frac{k_{22}}{k_{11} + k_{33}} \frac{1}{\epsilon} \simeq 1 \quad \text{i.e.} \quad \epsilon \simeq \frac{1}{3}. \quad (3.14)$$

Des estimations plus précises (cf. la figure 1a de [7]) conduisent à des valeurs encore plus faibles de ϵ .

En conséquence, nous avons décidé avec Werner Pesch d'*inclure le mode de torsion* (3.10) *dans la famille des modes actifs*⁶, i.e. de partir par exemple, pour la modélisation de structures bimodales, d'une superposition

$$V_{actifs} = [AV_1(\mathbf{q}) + BV_1(\mathbf{k}) + c.c.] + \varphi V_T \quad (3.15)$$

au lieu de (2.6), en reprenant les notations de la section 2.1.2. Dans ce nouvel « ansatz »⁷ φ est l'amplitude de la torsion moyenne et

$$V_T = (0, \cos[\pi z/(2h)], 0, 0, 0) \quad (3.16)$$

est le mode (3.10). Les amplitudes A , B et φ sont supposées « petites », « du même ordre de grandeur » et « lentement variables ». Dans les sections IV et VI ainsi que l'annexe B de [7] nous avons expliqué comment procéder « proprement » à l'élimination quasi statique des modes engendrés par couplages à l'ordre quadratique en ces amplitudes, en prenant par exemple garde

⁵En thermoconvection ; le cas de l'électroconvection donne des résultats similaires. Tout ceci est expliqué en détail dans la section III.B de [7].

⁶Pour prendre cette décision nous avons été inspirés par certains résultats expérimentaux d'Ahmed Belaidi concernant des rouleaux « anormaux », par des résultats numériques obtenus à ce sujet avec un code fortement non linéaire (je reviendrai sur tout cela section 3.2), et par le travail théorique de Rossberg et al. (1996). Dans ce travail l'équipe de Bayreuth s'est intéressée à l'électroconvection d'une couche de nématique en *ancrage homéotrope* $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}}$ aux parois. L'électroconvection est alors précédée d'une transition de Frederiks durant laquelle le directeur acquiert des composantes horizontales, i.e. ϑ qui était nul dans

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}} \cos \vartheta + (\hat{\mathbf{x}} \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \varphi) \sin \vartheta$$

devient strictement positif. Comme la direction horizontale du directeur repérée par l'angle φ est quelconque dans le plan horizontal, on a dans ce cas existence d'un « mode de Goldstone de torsion » qui est *strictement neutre* ($\sigma_T = 0$ au lieu de $\sigma_T < 0$ petit dans notre cas).

⁷Mot allemand signifiant « commencement » mais aussi « disposition », cher à mes collègues de Bayreuth !

au fait que $N_2(V_1(\mathbf{q})|V_1(-\mathbf{q}))$ n'est pas purement passif. Nous avons obtenu à l'ordre cubique en ces amplitudes le système suivant

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t A &= \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0(\mathbf{q})}{\tau_{\mathbf{q}}} - g_{\mathbf{q}}|A|^2 + \beta_2(\mathbf{q}) \varphi - \beta_3(\mathbf{q}) \varphi^2 \right) A - g_{\mathbf{qk}}|B|^2 A \\ \partial_t \varphi &= \left(\sigma_T - g_{\varphi} \varphi^2 + \Gamma(\mathbf{q}) |A|^2 + \Gamma(\mathbf{k}) |B|^2 \right) \varphi - \gamma(\mathbf{q}) |A|^2 - \gamma(\mathbf{k}) |B|^2 \\ \partial_t B &= \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0(\mathbf{k})}{\tau_{\mathbf{k}}} - g_{\mathbf{k}}|B|^2 + \beta_2(\mathbf{k}) \varphi - \beta_3(\mathbf{k}) \varphi^2 \right) B - g_{\mathbf{qk}}|A|^2 B \end{cases}} \quad (3.17)$$

Le modèle (3.6) peut être considéré comme une version simplifiée du modèle (3.17) dans laquelle on néglige les termes en $\varphi^2 A$, $\varphi^2 B$, φ^3 , φA^2 et φB^2 dans (3.17), et on procède à une élimination quasi statique de φ suivant

$$\varphi = \frac{\gamma(\mathbf{q}) |A|^2 + \gamma(\mathbf{k}) |B|^2}{\sigma_T} \quad (3.18)$$

qui redonne bien entendu (3.2) compte tenu de ce que

$$\gamma(\mathbf{q}) = \gamma_0 q_y + t.o.s. \quad \text{pour } q_x > 0 \quad \text{et } q_y \text{ petit}, \quad (3.19)$$

avec $\gamma_0 > 0$. Mentionnons aussi que le coefficient

$$\beta_2(\mathbf{k}) = \beta_0 k_y + t.o.s. \quad \text{pour } k_x > 0 \quad \text{et } k_y \text{ petit}, \quad (3.20)$$

avec $\beta_0 > 0$ joue un rôle important dans l'excitation du mode \mathbf{k} « dual » d'un \mathbf{q} zig dans le bimodal. Effectivement le modèle (3.17) prédit comme le modèle (3.6) une bifurcation des rouleaux obliques vers le bimodal variqueux au delà d'un seuil secondaire ϵ_V ; un point nouveau par rapport à ce modèle est que cette bifurcation semble être légèrement sous-critique [7]. Mais l'intérêt du modèle (3.17) est surtout de prédire au-delà d'un seuil tertiaire $\epsilon_{\text{HOPF}} > \epsilon_V$ une bifurcation de Hopf d'un type analogue à celle observée expérimentalement, c'est-à-dire avec des oscillations approximativement en opposition de phase de $|A|$ et $|B|$. Ce phénomène est mis en évidence sur la figure 3.4, qui présente les résultats d'une simulation du modèle (3.17) muni de coefficients calculés systématiquement pour la thermoconvection du 5CB à champ magnétique nul. Un point crucial est le rôle de « médiateur » joué par l'amplitude φ de la rotation du directeur moyen. Le mécanisme de ces oscillations se comprend en effet (cf. la figure 3.5), comme résultant d'une « frustration » entre

- d'une part le mécanisme de focalisation, qui privilégie des rouleaux de *vecteur d'onde parallèle au directeur moyen*⁸, ce qui est exprimé par le fait que $\beta_2(\mathbf{q}) > 0$ alors que $\beta_2(\mathbf{k}) < 0$.
- d'autre part le fait que les couples visqueux font que le *directeur tend à éviter* les gradients de vitesse qui lui sont transverses et donc *la direction du vecteur d'onde des rouleaux*⁹, ce qui est exprimé par le fait que $\gamma(\mathbf{q}) > 0$ alors que $\gamma(\mathbf{k}) < 0$.

⁸Ce mécanisme a été introduit section 1.1.1 page 15; on l'a retrouvé par une étude systématique des termes importants dans les coefficients β_2 [7].

⁹Ce mécanisme a été introduit section 1.1.3 page 23; on l'a retrouvé par une étude systématique des termes importants dans les coefficients γ [7].

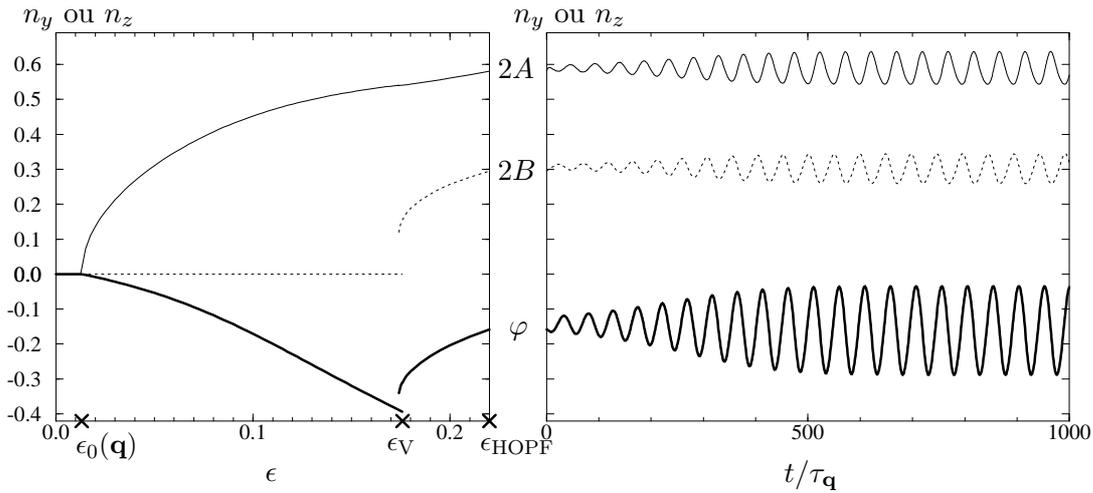


Fig. 3.4 – Solutions du modèle (3.17) pour un mode primaire \mathbf{q} zig et son dual \mathbf{k} zag, avec des coefficients calculés pour la thermoconvection du 5CB. Les modes linéaires (2.5a) et (2.5b) ayant été normalisés de sorte que $\tilde{n}_z(0; \mathbf{q}) = \tilde{n}_z(0; \mathbf{k}) = 1$, les amplitudes doubles $2A$ et $2B$ représentent les maxima de n_z en milieu de couche associés à chaque mode de rouleaux dans (3.15). Dans le diagramme de gauche on caractérise les solutions stationnaires stables de (3.17). Pour ϵ compris entre le seuil d’excitation linéaire $\epsilon_0(\mathbf{q})$ et le seuil secondaire ϵ_V le mode \mathbf{q} zig est stable ; notez la rotation associée du directeur vers $-\hat{y}$, en conformité avec le scénario représenté sur la gauche de la figure 1.6. À $\epsilon = \epsilon_V$ une bifurcation (légèrement) sous-critique vers le bimodal variqueux de vecteurs d’onde \mathbf{q} et \mathbf{k} a lieu. Cette structure n’est stable que dans une plage restreinte $\epsilon_V < \epsilon < \epsilon_{\text{HOPF}}$, au delà de laquelle se développent spontanément des *oscillations* de A , B et φ . Le développement temporel de ces oscillations après un saut de $\epsilon = 0.22 < \epsilon_{\text{HOPF}}$ à $\epsilon = 0.228 > \epsilon_{\text{HOPF}}$ est montré sur le diagramme de droite. Figure tirée de [7].

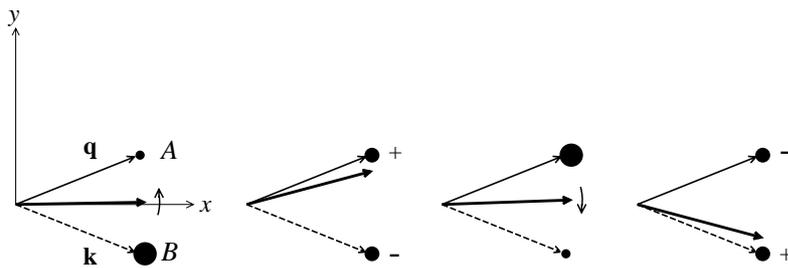


Fig. 3.5 – Schéma simplifié des mécanismes expliquant les oscillations de bimodal. Si B augmente, comme $\gamma(\mathbf{k}) < 0$ le directeur est repoussé vers le vecteur d’onde \mathbf{q} . Alors comme $\beta_2(\mathbf{q}) > 0$ l’amplitude A augmente. En conséquence, puisque $\gamma(\mathbf{q}) > 0$, le directeur est repoussé vers le vecteur d’onde \mathbf{k} . Finalement, comme $\beta_2(\mathbf{k}) < 0$, l’amplitude B va de nouveau augmenter...

J'ai nommé dans [7] ce mécanisme « *frustration entre directeur et vecteur d'onde* » ; plus prosaïquement on pourrait dire qu'entre vecteurs d'ondes et directeur le mot d'ordre c'est « *je t'aime - moi non plus* » d'où l'instabilité du ménage à trois *zig - zag - directeur*...

J'ai vérifié avec Werner Pesch que ces mécanismes existent à la fois en thermo- et électroconvection, pour lesquelles on obtient de façon robuste le scénario présenté figure 3.4. Ce scénario peut donc être proposé pour interpréter les oscillations de bimodal observées depuis longtemps en convections des nématiques, par exemple par Bolomey & Dimitropoulos (1976)¹⁰. Pour une confirmation expérimentale indiscutable, qui requiert la mise en œuvre de méthodes permettant de « démasquer » le « mode de torsion caché », on consultera Dennin (2000) : sa figure 7 constitue une validation expérimentale claire du scénario proposé ici figure 3.4.

3.2 Les rouleaux deviennent « *anormaux* »

3.2.1 Des rouleaux d'axe normal mais de champs « *anormaux* »

Une propriété importante des rouleaux normaux, i.e. d'axe normal à la direction d'ancrage planaire $\hat{\mathbf{x}}$, est leur symétrie sous les miroirs $S : y \mapsto y_0 - y$. Ces miroirs agissent sur les champs locaux de l'électroconvection, à savoir le potentiel électrique réduit ϕ , les composantes n_y et n_z du directeur, et les deux potentiels f et g de vitesse, suivant la règle déjà rencontrée section 1.1.3 équation (1.18) pour le cas de la thermoconvection,

$$\phi \mapsto \phi, \quad n_y \mapsto -n_y, \quad n_z \mapsto n_z, \quad f \mapsto f, \quad g \mapsto -g. \quad (3.21)$$

En conséquence dans des rouleaux normaux on a

$$n_y = 0 \quad \text{et} \quad g = 0 \quad (3.22)$$

i.e. il n'y a pas de rotation du directeur dans le plan horizontal et pas d'hélicité¹¹.

Cela n'est pas le cas, bien entendu, des rouleaux obliques, dont le vecteur d'onde \mathbf{q} lui-même n'est pas invariant sous S , puisque $q_y \neq 0$. Comme on l'a vu figure 1.3, les rouleaux obliques sont en conséquence des structures à deux variants zig et zag se correspondant par S et (3.21). On n'est donc pas étonné de constater que des « *parois de domaine* » ou « *murs* » séparent dans l'espace physique les domaines zig des domaines zag : de tels murs parallèles à $\hat{\mathbf{x}}$ sont visibles figures 1.3 et 3.6a ; on peut aussi observer des murs parallèles à $\hat{\mathbf{y}}$ sur la figure 3.6b.

Ce qui est étonnant, par contre, c'est d'observer des rouleaux d'axe normal séparés par une paroi de domaine, comme sur la figure 3.6c. Cette paroi se manifeste comme un rouleau beaucoup plus contrasté en lumière extraordinaire. Elle est obtenue par une évolution des vecteurs d'ondes \mathbf{q} et $S(\mathbf{q})$ des domaines gauche et droit de la paroi de la figure 3.6b avec le paramètre de contrôle¹² ϵ : les composantes parallèles à $\hat{\mathbf{y}}$ de ces vecteurs d'ondes diminuent en valeur absolue lorsque ϵ augmente, jusqu'à s'annuler complètement. On a alors affaire à deux structures de

¹⁰Le fait d'avoir des vecteurs d'ondes symétriques est, à ce niveau, « anecdotique ».

¹¹Plus précisément pas de composante de vitesse parallèle au vecteur vorticité, cf. à ce sujet l'équation (B.4) de [4].

¹²R duit selon (2.1).

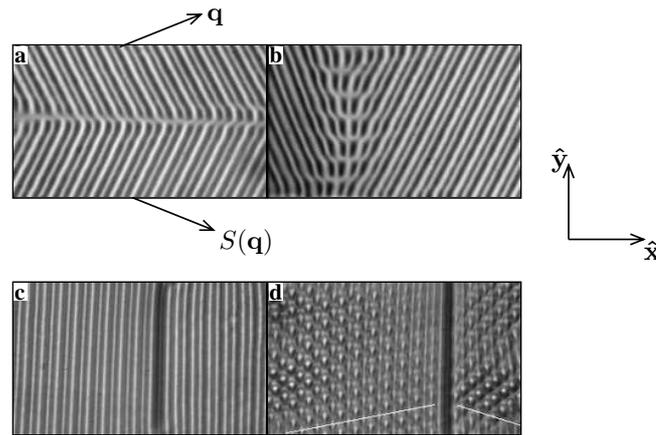


Fig. 3.6 – Photographies expérimentales réalisées en lumière extraordinaire par Ahmed Belaidi en électroconvection du Phase 5 à basse fréquence [6]. (a, b) : Structures de rouleaux obliques obtenues près du seuil, pour $\epsilon \simeq 0.02$, avec des parois de domaine parallèles à \hat{x} et \hat{y} . (c) : *Paroi de domaine* à $\epsilon \simeq 0.40$ correspondant à l'évolution spontanée, en régime fortement non linéaire, de la structure montrée en (b). (d) : Structures bimodales variqueuses obtenues à $\epsilon \simeq 0.70$ à partir de la structure montrée en (c); les lignes blanches indiquent les directions des vecteurs de base secondaires des deux réseaux directs.

même vecteur d'onde $\mathbf{q}' \parallel \hat{x}$ mais cependant différentes puisque une paroi les sépare. Le fait que ces structures diffèrent fondamentalement est confirmé par leur évolution à des valeurs encore plus grandes de ϵ , puisqu'une instabilité bimodale variqueuse a lieu dans les domaines gauche et droit mais avec deux vecteurs d'ondes secondaires différents, qui se correspondent par le miroir $S : y \mapsto -y$. Les rouleaux de la figure 3.6c, dont le vecteur d'onde est invariant sous S mais pas les champs locaux, ont donc été appelés « *rouleaux anormaux* »¹³.

3.2.2 La faillite du modèle faiblement non linéaire

En faiblement non linéaire il n'y a qu'une famille de modes actifs, à savoir les modes de rouleaux du type (2.5a), qui sont définis univoquement par leur vecteur d'onde. Que deux structures puissent posséder un même vecteur d'onde mais des champs locaux très différents est donc le résultat d'effets fortement non linéaires.

3.2.3 Des modèles plus ou moins fortement non linéaires

Lorsque je suis arrivé à Bayreuth en octobre 1996, j'ai commencé par mener des calculs fortement non linéaires grâce à un code de Galerkin mis au point par Werner Decker et Werner Pesch, et avec lequel ils avaient déjà obtenus des résultats intéressants. Ces résultats, publiés dans Kramer & Pesch (1996)¹⁴, montraient notamment l'existence, à basse fréquence et ϵ élevé, de rouleaux de vecteur d'onde parallèle à \hat{x} *stables*, alors qu'au seuil ($\epsilon \simeq 0$) des rouleaux obliques sont préférés i.e. les rouleaux de vecteur d'onde parallèle à \hat{x} sont *instables*. Cependant ces résultats n'étaient pas compris.

¹³Par analogie avec une structure analogue observée en électroconvection en conditions d'*ancrage homéotrope* par Richter et al. (1995).

¹⁴Voir en particulier la figure 6.7b de ce chapitre.

En menant une étude fine des caractéristiques des rouleaux fortement non linéaires ainsi obtenus, par une méthode de continuation (de type Newton), à partir de rouleaux obliques, je me suis aperçu qu'ils diffèrent par l'existence d'une forte composante moyenne de n_y , négative lorsque la solution a été obtenue à partir de rouleaux obliques zigs, positive lorsque la solution a été obtenue à partir de rouleaux obliques zags. J'ai alors compris le lien avec les scénarios expérimentaux mis en évidence par Ahmed Belaidi : ces rouleaux anormaux diffèrent essentiellement à cause d'une rotation homogène du directeur dans le plan horizontal, qui finit par stabiliser les perturbations de type zig-zag dangereuses lorsque ϵ est faible. Ce scénario est expliqué dans [6], et plus particulièrement sur la figure 2 de cet article, reproduite en annexe H page 142 de ce mémoire, et que je vous invite à consulter.

Je préfère mentionner ici qu'une approche faiblement non linéaire *étendue* de ces phénomènes est possible et très instructive. Elle repose sur un sous-modèle de (3.17) obtenu en considérant un seul mode de vecteur d'onde \mathbf{q} parallèle à $\hat{\mathbf{x}}$, i.e. en posant $B = 0$ et, en vertu de (3.19) et (3.20),

$$\gamma(\mathbf{q}) = \beta_2(\mathbf{q}) = 0. \quad (3.23)$$

On obtient ainsi le système modèle

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t A &= \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0(\mathbf{q})}{\tau_{\mathbf{q}}} - g_{\mathbf{q}} |A|^2 - \beta_3(\mathbf{q}) \varphi^2 \right) A \\ \partial_t \varphi &= \left(\sigma_T - g_{\varphi} \varphi^2 + \Gamma(\mathbf{q}) |A|^2 \right) \varphi \end{cases}}. \quad (3.24)$$

Tronqué à l'ordre faiblement non linéaire, il donne

$$\begin{cases} \partial_t A &= \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0(\mathbf{q})}{\tau_{\mathbf{q}}} - g_{\mathbf{q}} |A|^2 \right) A \\ \partial_t \varphi &= \sigma_T \varphi \end{cases}, \quad (3.25)$$

qui confirme (puisque $g_{\mathbf{q}} > 0$) que près du seuil les rouleaux normaux bifurquent de façon sur-critique, et n'impliquent aucune rotation horizontale du directeur ; puisque $\sigma_T < 0$ dans (3.25) on peut même affirmer que la solution naturelle $\varphi = 0$ de (3.25) est stable vis-à-vis de perturbations homogènes du directeur.

Par contre, comme $\Gamma(\mathbf{q}) > 0$ dans (3.24), il est clair que lorsque l'amplitude A devient suffisamment grande pour que le terme positif $\Gamma(\mathbf{q}) |A|^2$ compense le facteur d'amortissement σ_T , i.e. lorsque

$$\epsilon > \epsilon_{\text{RA}}(\mathbf{q}) = \epsilon_0(\mathbf{q}) + |\tau_{\mathbf{q}} \sigma_T| g_{\mathbf{q}} / \Gamma(\mathbf{q}), \quad (3.26)$$

une perturbation homogène de directeur sera amplifiée pour conduire à une **bifurcation directe des rouleaux normaux vers des rouleaux anormaux** avec soit $\varphi > 0$, soit $\varphi < 0$. Une analyse détaillée des mécanismes physiques correspondants, menée en étudiant l'origine du signe positif du coefficient $\Gamma(\mathbf{q})$, montre que cette bifurcation est encore une *conséquence de la tendance qu'a le directeur à éviter le vecteur d'onde des rouleaux* [7].

Cette bifurcation a été identifiée expérimentalement en électroconvection à haute fréquence par Rudroff et al. (1998), qui ont d'ailleurs mené une étude précise du voisinage du point de codimension 2 où la bifurcation des rouleaux normaux vers les rouleaux anormaux devient directe¹⁵. Les figures 2 et 3 de Rudroff et al. (1998) constituent ainsi une confirmation nette des modèles que nous avons proposé dans [6] et [7] (en particulier sur les figures 3 de ces articles).

¹⁵Sans étape intermédiaire de rouleaux obliques.

Chapitre 4

Couplages entre modes moyen, de grande et de petite échelle

Que ce soit pour expliquer les transitions

rouleaux obliques \rightarrow bimodal variqueux stationnaire (équations 2.9),

bimodal stationnaire \rightarrow bimodal oscillant (équations 3.17),

rouleaux normaux \rightarrow rouleaux anormaux (équations 3.24),

ou encore Poiseuille plan \rightarrow Poiseuille + ondes de Tollmien-Schlichting (équation 2.24),

toutes les équations écrites jusqu'ici ne concernent que des **amplitudes** ne dépendant que du temps, et méritent donc le qualificatif d'*équations de Landau*. Plus précisément, un point commun fondamental entre toutes les **structures périodiques** énumérées ci-dessus est la simplicité de leur spectre de Fourier dans les grandes directions spatiales, constitué de nombres d'ondes multiples d'un nombre d'onde de base q dans le cas de systèmes quasi unidimensionnels (tels les modèles de convection tournante annulaire ou l'écoulement entre deux plans), ou de vecteurs d'ondes multiples d'un ou deux vecteurs d'ondes de base \mathbf{q} ou \mathbf{k} dans le cas de systèmes quasi bidimensionnels (en convections de cristaux liquides), avec à chaque fois une séparation claire entre les grandes échelles L (la longueur de périodicité du système, typiquement) et les petites échelles $\lambda = 2\pi/q$ ou $2\pi/|\mathbf{q}|$ ou $2\pi/|\mathbf{k}|$.

Au contraire, intéressons nous dans ce chapitre à des **structures modulées** de spectres de Fourier plus compliqués, décrites en régime faiblement non linéaire par des « **enveloppes** » c'est-à-dire des amplitudes *fonctions des coordonnées spatiales correspondants aux grandes dimensions du système*, en l'occurrence la seule direction x puisque je vais me restreindre à des systèmes quasi unidimensionnels étendus dans cette seule direction. Par exemple, pour un système (thermo)hydrodynamique bidimensionnel quasi unidimensionnel, la partie active de la fonction courant¹ est maintenant écrite sous la forme (« spectrale »!) d'un « paquet d'ondes »

$$\psi_a^* = \sum_{k \ll q} \hat{A}(q+k) \Psi_1(y; q+k) \exp[i(q+k)x - \omega t] + c.c. \quad (4.1a)$$

où $\Psi_1(y; q+k)$ est la fonction courant complexe du mode neutre de nombre d'onde $q+k$, q étant le nombre d'onde critique, ω la pulsation critique. La somme utilisée est discrète à cause de la

¹Pour un système *thermo*hydrodynamique un ansatz similaire est bien sûr posé pour le champ de température réduite.

quantification des nombres d'ondes imposée par l'usage de conditions limites périodiques²; la structure est vraiment modulée si il existe au moins deux valeurs de k pour lesquelles³

$$\widehat{A}(q+k) \neq 0 .$$

En utilisant la continuité des modes linéaires par rapport à des variations du nombre d'onde, on utilisera plutôt pour les calculs non linéaires

$$\psi_a^* = A(x,t) \Psi_1(y;q) \exp[i(qx - \omega t)] + c.c. + t.o.s. \quad (4.1b)$$

avec

$$A(x,t) = \sum_{k \ll q} \widehat{A}(q+k) \exp(ikx) \quad (4.1c)$$

la fameuse « enveloppe ». À l'ordre $|A|^2$ on obtient, à cause de la présence de termes non linéaires quadratiques dans les équations, l'excitation de modes (passifs) de nombres d'ondes $k - k'$ avec k et k' petits c'est-à-dire d'un **mode moyen** lorsque $k = k'$ et de **modes de grande échelle** lorsque $k \neq k'$. La problématique d'une modélisation efficace et unifiée de ce type de structures et de leur dynamique se résume alors à l'obtention d'une équation aux dérivées partielles décrivant l'évolution temporelle de l'enveloppe A ; on désigne une telle équation comme une « **équation d'enveloppe** » ou « **équation de Ginzburg-Landau** ». C'est en essayant de calculer systématiquement une telle équation pour le *modèle de convection tournante annulaire de Busse* (présenté section 1.2.1) que je fus confronté à des désaccords entre l'équation de Ginzburg-Landau pour les ondes de Rossby thermiques, progressives quasi unidimensionnelles,

$$\tau(\partial_t A + v_g \partial_x A) = (1 + ic_0)\epsilon A + \xi^2(1 + ic_1)\partial_x^2 A - \gamma(1 + ic_3)|A|^2 A , \quad (4.2)$$

dont je calculais pourtant les coefficients en appliquant une méthode « standard » aux équations du modèle⁴, et une analyse numérique de la stabilité secondaire des ondes (faiblement) non linéaires. Après quelques mois de recherche, j'ai réalisé que ce problème était lié à un traitement commun erroné du mode moyen et des modes de grande échelle, qui diffèrent, en fait, fondamentalement, et qu'en conséquence l'équation (4.2) n'est pas valable en géométrie annulaire. Avant d'expliquer ceci dans le détail, dans le contexte de ces modèles *bidimensionnels* section 4.1, puis de modèles *tridimensionnels* section 4.2, il peut être important de rappeler que l'étude des structures modulées s'impose dans le cas d'instabilités structurantes oscillantes, puisque génériquement des ondes non linéaires peuvent présenter des instabilités secondaires de Benjamin-Feir-Eckhaus conduisant spontanément, dès le stade faiblement non linéaire, à des

²Sous $x \mapsto x + L$; en conséquence les nombres d'ondes k sont multiples de $q_0 = 2\pi/L$; quand $L \rightarrow +\infty$ on utilise plutôt un formalisme continu en remplaçant (4.1a) par

$$\psi_a^* = \int_{k \ll q} \widehat{A}(q+k) \Psi_1(y;q+k) \exp[i(q+k)x - \omega t] dk + c.c.$$

³Si $\widehat{A}(q+k) \neq 0$ pour une seule valeur de k la structure n'est pas modulée mais périodique; bien entendu les méthodes permettant de calculer les structures modulées permettent aussi de calculer des structures périodiques.

⁴Ici encore il ne s'agit pas de la méthode « multiéchelles » la plus « standard » dans la communauté française, mais plutôt d'une méthode *spectrale* basée d'une part sur l'identification des coefficients linéaires à partir de la relation de dispersion des modes linéaires, et d'autre part sur le calcul de l'équation de Landau associée au mode critique (comme section 2.2) pour obtenir le coefficient de saturation γ . Cette méthode est par exemple esquissée dans la section de remarques préliminaires de Aranson & Kramer (2002).

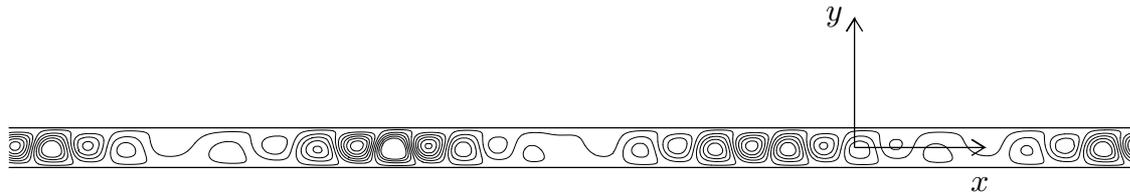


Fig. 4.1 – Lignes de courant instantanées d’une *structure modulée* obtenue par simulation numérique de l’équation de Ginzburg-Landau non locale (4.17) en utilisant les paramètres calculés dans [10] pour le modèle bidimensionnel de Busse, un nombre de Prandtl $P = 0.006$ et un nombre de Coriolis $\eta = 1000$. Notez que, par rapport à la figure présentée page 8, j’ai rétabli la géométrie cartésienne du modèle.

ondes modulées voire à du chaos spatio-temporel ou « turbulence faible » (cf. par exemple Aranson & Kramer 2002). Un exemple d’ondes modulées, obtenues grâce à une simulation numérique d’une équation de Ginzburg-Landau généralisée, est présenté sur la figure 4.1.

4.1 Cas de modèles bidimensionnels du type de celui de Busse

4.1.1 Étude d’un modèle « général » et mise en évidence du mode global

Depuis la première version de cette étude, effectuée en 2000, un certain recul a été pris. L’objet de cette section est donc de donner une présentation de résultats qui englobent ceux de [10], d’une façon légèrement différente, qui me semble meilleure. Considérons ainsi un modèle du type de celui posé dans [12] (rappelons que la géométrie du modèle a été présentée section 1.2.1 et plus particulièrement sur la figure 1.8), un peu plus général que celui posé dans [10] puisque prenant en compte, outre les effets dûs à l’*adhérence aux parois* et à la *courbure éventuelle des couvercles*, ceux de la *friction d’Ekman sur les écoulements moyens ou de grande échelle*.

En utilisant des grandeurs adimensionnelles et en désignant par τ_{xy} la contrainte de Reynolds engendrée par l’onde critique lorsqu’elle possède une amplitude $A = 1$, l’équation de Navier-Stokes moyenne à résoudre pour calculer le *mode homogène de vitesse azimuthale* est donc⁵

$$0 = \partial_y^2 u_H - f_E u_H + \partial_y \tau_{xy} \quad (4.3a)$$

où le coefficient de friction d’Ekman

$$f_E = 2 E^{-1/2} \Gamma ,$$

E étant le nombre d’Ekman et Γ le rapport d’aspect du cylindre annulaire, quotient de son inter-rayon par sa hauteur [12]. Deux commentaires sont nécessaires. D’une part, à cause de la géométrie annulaire, il n’y a pas de gradient de pression homogène dans (4.3a). Plus précisément c’est cette équation même qui assure l’existence d’un champ de pression périodique dans le système, puisqu’elle correspond à l’explicitation en régime faiblement non linéaire de⁶

$$p(x + L) = p(x) \iff \langle \partial_x p \rangle_x = 0 . \quad (4.3b)$$

⁵L’équation (4.3a) est tout simplement une version adimensionnelle réduite de l’équation (1.46).

⁶Rappelons que L est la longueur de périodicité du système c’est-à-dire le périmètre moyen de l’anneau. Signalons aussi qu’oublier l’équation (4.3) en utilisant un schéma où on résout seulement l’équation de la vorticité est non physique (voir à ce sujet la figure 4.2b) ; cette erreur fut par exemple celle de Cardin & Olson (1995).

D'autre part, ce mode de vitesse, lorsque la partie active primaire de la solution est donnée par (4.1), doit être multiplié par la partie strictement homogène de $|A(x, t)|^2$ pour donner sa contribution à la partie passive de la solution :

$$\psi_{passifs}^H = \sum_k |\widehat{A}(q+k)|^2 \Psi_H(y) = \langle |A(x, t)|^2 \rangle_x \Psi_H(y) \quad (4.4)$$

avec

$$\Psi_H(y) = \int_{-1/2}^y u_H(y') dy' .$$

La contribution (4.4) doit être soigneusement distinguée de la **contribution de grande échelle** (ou d'échelle « longue ») à la partie passive de la solution,

$$\begin{aligned} \psi_{passifs}^L &= \sum_k \sum_{k' \neq k} \widehat{A}(q+k) \widehat{A}^*(q+k') \exp[i(k-k')x] \Psi_L(y) \\ \psi_{passifs}^L &= [|A(x, t)|^2 - \langle |A(x, t)|^2 \rangle_x] \Psi_L(y) , \end{aligned} \quad (4.5)$$

qui, au contraire, est typiquement associée à des gradients de pression azimutaux de grande échelle, et doit donc être calculée à partir de l'équation de la vorticité. L'écriture du mode de grande échelle en fonction courant dès le début est indispensable, et on peut remarquer que les conditions limites correspondantes

$$\Psi_L(\pm 1/2) = \Psi'_L(\pm 1/2) = 0$$

impliquent que le mode de vitesse azimuthale de grande échelle est *  débit nul*,

$$\langle u_L \rangle_y = \int_{-1/2}^{1/2} \Psi'_L(y) dy = [\Psi_L(y)]_{-1/2}^{1/2} = 0 . \quad (4.6)$$

On peut retrouver ce résultat en explicitant l'équation d'incompressibilité dans la limite de grande échelle i.e. d'un mode de Fourier pur de nombre d'onde $k \rightarrow 0$ avec $k \neq 0$:

$$iku_L \exp(ikx) + \partial_y v_L \exp(ikx) = 0 \quad (4.7)$$

implique bien par intégration par rapport à y la contrainte de débit nul (4.6). On peut aussi retrouver à partir de l'équation (4.7) que la composante de vitesse v_L est négligeable en première approximation. Compte-tenu de cette information, et d'une analyse d'ordre de grandeur des termes de contraintes de Reynolds dans l'équation de la vorticité de grande échelle (i.e. dans la limite $k \rightarrow 0$ avec $k \neq 0$), on peut écrire celle-ci sous la forme (après division par $\exp(ikx)$)

$$0 = \partial_y^3 u_L - f_E \partial_y u_L + \partial_y^2 \tau_{xy} . \quad (4.8)$$

On a ainsi ramené le problème du calcul du mode de grande échelle à celui de la solution $u_L(y)$ de (4.8) qui vérifie de plus les conditions

$$u_L(\pm 1/2) = 0 \quad \text{et} \quad \langle u_L \rangle_y = 0 . \quad (4.9)$$

On peut d'ores et déjà remarquer qu'une intégration de (4.8) par rapport à y conduit à

$$0 = G + \partial_y^2 u_L - f_E u_L + \partial_y \tau_{xy} \quad (4.10a)$$

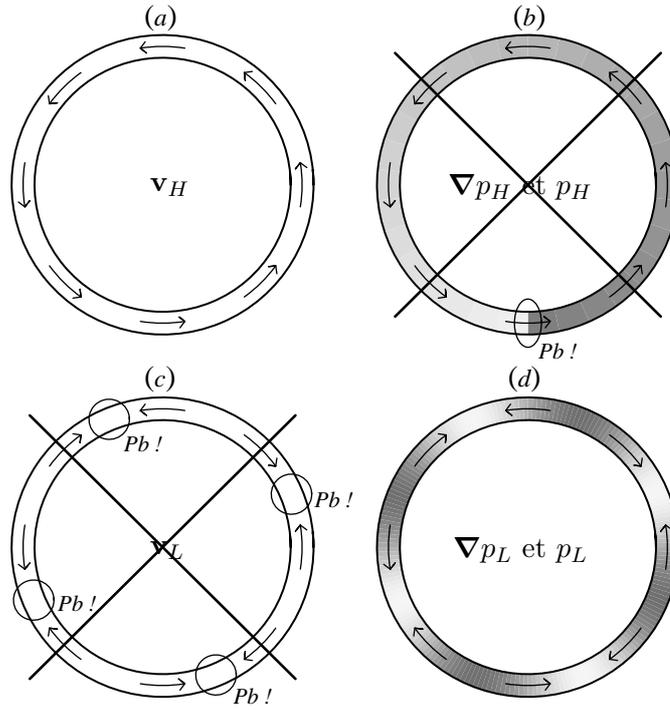


Fig. 4.2 – Schémas de principe illustrant les *spécificités* des *modes homogène* (« H ») et *de grande échelle* (« L »). (a) : Le mode de vitesse homogène est typiquement à débit non nul. (b) : Par contre il ne peut y avoir de gradient de pression moyen, sinon le champ de pression (caractérisé par des niveaux de gris) serait non périodique sur un tour. (c) : Un mode de vitesse de grande échelle, en $\cos(kx)$ avec k petit, ne saurait être à débit non nul, car sinon on violerait la condition d’incompressibilité (4.7), avec par exemple dans les zones entourées une compression du fluide. (d) : Par contre un tel mode peut être associé à des gradients de pression de grande échelle, auxquels correspond un champ de pression (caractérisé par des niveaux de gris) périodique sur un tour.

où G est une constante, soit encore (après multiplication par $\exp(ikx)$)

$$0 = G \exp(ikx) + \partial_y^2 u_L \exp(ikx) - f_E u_L \exp(ikx) + \partial_y \tau_{xy} \exp(ikx) \quad (4.10b)$$

qui met explicitement en évidence les gradients de pression azimutaux de grande échelle annoncés plus haut ; on consultera aussi la figure 4.2 qui reprend schématiquement les éléments clefs que nous venons de présenter.

En général la contrainte de Reynolds τ_{xy} a une forme compliquée (cf. la discussion de la section 1.2.3!), et en conséquence les solutions u_H de (4.3a) et u_L de (4.10a) sont elles aussi d’une forme compliquée, qui ne peut être obtenue que numériquement. Par contre la différence

$$\boxed{u_G = u_H - u_L} \quad (4.11)$$

est solution, d’après (4.3a) et (4.10a), de

$$0 = -G + \partial_y^2 u_G - f_E u_G, \quad (4.12)$$

équation différentielle qui signifie que u_G *équilibre un gradient de pression moyen* $G\hat{x}$, et dont on peut donner la solution analytique. En l’absence d’effets de friction d’Ekman, lorsque

$f_E = 0$, on obtient naturellement un écoulement de Poiseuille

$$u_G = -\frac{1}{8} G (1 - 4y^2) . \quad (4.13a)$$

Par contre, en présence de friction d'Ekman, lorsque $f_E > 0$, il vient⁷

$$u_G = -f_E^{-1} G [1 - \cosh(\mu y) / \cosh(\mu/2)] \quad (4.13b)$$

à condition de poser

$$\mu = f_E^{1/2} = 2^{1/2} E^{-1/4} \Gamma^{1/2} .$$

Ainsi, en rotation rapide, lorsque f_E et μ deviennent grand, l'écoulement u_G devient constant au cœur du système, pour n'adhérer aux bords que dans de fines couches limites (du type couches de Stewartson, cf. Greenspan 1968) d'épaisseur $1/\mu \sim E^{1/4}$, comme le montre la figure 4.3. On peut aussi noter qu'à cause de la friction d'Ekman la valeur moyenne $\langle u_G \rangle_y$ tend vers 0 à G fixé en rotation rapide : $\langle u_G \rangle_y \sim -E^{1/2} G$ quand $E \rightarrow 0$.

Un point intéressant⁸ est que le « gradient de pression » inconnu G peut être estimé sans effectuer le calcul explicite de u_L , mais à partir de la connaissance de u_H seulement *et* de l'information (4.6). En effet, compte tenu d'autre part de la définition (4.11), on obtient

$$\langle u_G \rangle_y = \langle u_H \rangle_y ,$$

d'où, à l'aide de (4.13),

$$\begin{aligned} G &= -12 \langle u_H \rangle_y & \text{si } f_E = 0 , \\ G &= -f_E \left(1 - \frac{2}{\mu} \tanh \frac{\mu}{2}\right)^{-1} \langle u_H \rangle_y & \text{si } f_E > 0 . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ainsi *l'origine de la singularité aux grandes échelles*, $u_H \neq u_L$ i.e. $u_G \neq 0$, *est l'existence éventuelle d'un écoulement moyen à débit non nul*

$$\langle u_H \rangle_y \neq 0 , \quad (4.15)$$

qui ne peut donc donner aussi la forme des écoulements de grande échelle, comme l'explique la figure 4.2c.

Si la condition (4.15) est vérifiée, la partie moyenne et de grande échelle du champ de vitesse à l'ordre quadratique, obtenue en sommant (4.4) et (4.5), s'écrit

$$\mathbf{v}_{passifs}^{HL} = \mathbf{v}_{passifs}^H + \mathbf{v}_{passifs}^L$$

$$\mathbf{v}_{passifs}^{HL} = |A(x,t)|^2 u_L(y) \hat{\mathbf{x}} + \langle |A(x,t)|^2 \rangle_x u_G(y) \hat{\mathbf{x}} + t.o.s. \quad (4.16)$$

⁷La limite $f_E \rightarrow 0$ est régulière.

⁸Qui n'avait pas été établi dans [10], même dans le cas $f_E = 0$.

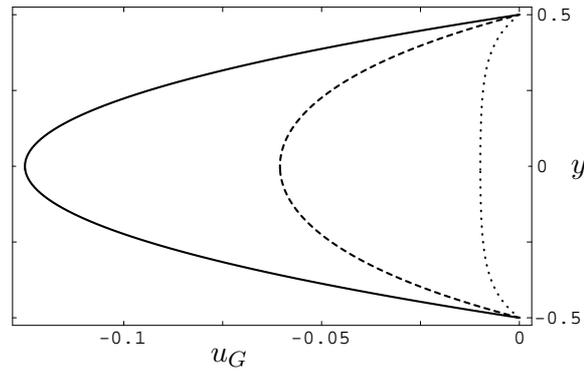


Fig. 4.3 – Profils des *modes globaux* d'écoulement (4.13) normalisés en prenant $G = 1$ en convection annulaire tournante sans friction d'Ekman : courbe continue $f_E = 0$; avec friction d'Ekman : courbe tiretée $f_E = 10$; courbe pointillée $f_E = 10^2$.

avec un mode $u_G \neq 0$. L'équation (4.16) montre que ce mode de vitesse azimuthale u_G doit être considéré comme un « *mode global* ». Par rétroaction de ce mode global sur les modes linéaires à l'ordre cubique on obtient finalement l'*équation de Ginzburg-Landau non locale*⁹

$$\tau(\partial_t A + v_g \partial_x A) = (1 + ic_0)\epsilon A + \xi^2(1 + ic_1)\partial_x^2 A - \gamma(1 + ic_3)|A|^2 A - \delta(1 + id_3)\langle |A|^2 \rangle_x A . \quad (4.17)$$

On peut rappeler à ce stade que, dans le modèle de convection tournante quasi géostrophique le plus simple, c'est-à-dire en *conditions de glissement sans frottement* aux parois et en *négligeant la courbure des couvercles*, la fonction courant critique prend en conséquence la forme très simple

$$\Psi_1(y) = \cos(\pi y) .$$

Comme cette fonction courant est réelle, les séparatrices associées sont droites et la contrainte de Reynolds τ_{xy} correspondante est nulle en vertu de la formule (1.40). Ainsi il n'y a pas d'écoulement moyen engendré à l'ordre $|A|^2$, $u_H = 0$, donc en vertu du critère (4.15) il n'y a pas d'effets non locaux. Effectivement, Herrmann & Busse (1997) ont montré que la dynamique faiblement non linéaire des ondes de Rossby thermiques de ce modèle est bien décrite par l'équation de Ginzburg-Landau standard. Nous avons traité le cas du modèle en *conditions d'adhérence* aux parois dans [10], en montrant qu'alors la fonction courant critique est vraiment complexe¹⁰ d'où des effets non locaux¹¹. Je vous invite à consulter les sections 4.3 et 4.4 de [10] pour une présentation des propriétés de stabilité secondaire de l'onde de Rossby critique que l'on peut déduire de (4.17), en notant que l'on prédit, à Prandtl faible, des régimes d'ondes modulées ou de turbulence faible ; revoyez aussi la figure 4.1 page 63. Notez enfin que le modèle [10] ne prenait en compte ni une courbure des couvercles ni la friction d'Ekman. Les résultats (nouveaux) présentés ici, en particulier les équations (4.13) et (4.14) dans le cas $f_E > 0$, sont une première étape dans la direction d'une étude plus générale prenant en compte ces effets, étude qu'il conviendrait de

⁹Ou *équation de Ginzburg-Landau avec terme de « couplage global »*.

¹⁰Voir à ce sujet la figure 5 de [10], reproduite en annexe J page 179.

¹¹Les équations (4.9) et (4.10) de [10] indiquent (en échangeant les rôles de x et y pour se ramener à nos nouvelles notations, cf. la note 16 du bas de la page 28) que

$$u_L = -\partial_y \Psi_2 \quad \text{et} \quad u_H = u_L + M_2(1 - 4y^2) \quad \text{i.e.} \quad u_G = u_H - u_L = M_2(1 - 4y^2) ,$$

qui correspond bien à notre équation (4.13a). Par identification, on obtient d'ailleurs le lien entre la constante M_2 de [10] et notre constante G : $M_2 = -G/8$.

conclure en calculant systématiquement¹² les écoulements u_H et les coefficients de l'équation de Ginzburg-Landau non locale (4.17).

4.1.2 Discussion

Avant de passer à l'étude d'une classe bien différente de modèles, il faut insister sur le *caractère générique des effets de couplage global mis en évidences ici...* à tel point que j'ai réalisé en 2000, grâce à une discussion avec François Daviaud, que j'avais en fait redécouvert là un effet prédit par Hall (1984) pour un autre système annulaire, à savoir le *système de Taylor-Couette*¹³. Toujours dans ce système, mais en régime de *spirales turbulentes*, Hayot & Pomeau (1994) ont proposé une extension phénoménologique intéressante du modèle (4.17), qui pourrait expliquer certains aspects de la « localisation » de la turbulence...

Bien entendu, des effets non locaux et non linéaires du type de celui présent dans (4.17) peuvent exister dans des systèmes très différents et pour d'autres raisons. Par exemple, dans une *colonne d'un plasma de décharge*, un champ local est la composante E_x du champ électrique. Comme la différence de potentiel électrique U appliquée à la colonne est la quantité que l'on contrôle, on a à satisfaire une équation non locale

$$\int_0^L E_x dx = L \langle E_x \rangle_x = U \quad (4.18)$$

en quelque sorte analogue à notre condition d'absence de gradient de pression moyen (4.3b). En conséquence Bruhn et al. (1998) ont montré que la dynamique faiblement non linéaire des *ondes d'ionisation* dans une telle colonne est régie par l'équation de Ginzburg-Landau non locale (4.17). Leur article est intéressant d'un autre point de vue aussi, puisqu'il présente l'analyse générale de stabilité de *toutes* les solutions ondes pures¹⁴ de (4.17).

4.2 Cas de modèles tridimensionnels de convection de Rayleigh-Bénard tournante

4.2.1 Motivation de l'étude et présentation des modèles

Motivé par les résultats obtenus dans [10], et par une discussion intéressante que j'ai eu en 2000 avec Werner Pesch, j'ai décidé ensuite de montrer l'existence de ces effets non locaux dans des modèles *tridimensionnels* de *convection annulaire tournante*, cette fois-ci *de Rayleigh-Bénard* i.e. avec chauffage par le bas. Des systèmes proches avaient fait l'objet de nombreuses études dans les années 1990, notamment du fait de l'équipe de Robert Ecke. Cette équipe a travaillé dans des disques en rotation solide (figure 4.4a), et montré qu'en rotation rapide la convection ne naît pas au cœur du disque mais au contraire sous la forme d'*ondes de bord* qui se propagent rétrogradement, voir par exemple Ning & Ecke (1993) et la figure 4.4c

¹²On peut remarquer que l'approximation (1.47) conduit à un écoulement homogène à débit nul ; elle devra donc être levée pour cette étude, i.e. on devra résoudre numériquement l'équation (4.3a).

¹³Cependant l'article de Hall (1984) présente quelques faiblesses, par exemple du fait d'un choix discutable de plusieurs lois d'échelles posées de façon un peu arbitraire.

¹⁴Et pas seulement la solution critique, que nous avons exclusivement étudiée dans [10].

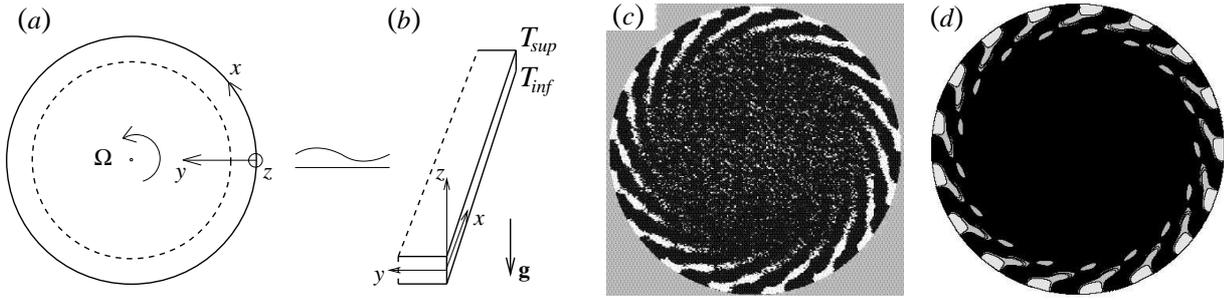


Fig. 4.4 – (a) : Principe de la convection de Rayleigh-Bénard tournante. Un disque ou un anneau de fluide chauffé par le bas est mis en rotation. (c) : Image expérimentale d’une *onde de bord* obtenue par ombroscopie (et après traitement) par Liu & Ecke (1999). (d) : Isothermes d’un mode linéaire d’onde de bord calculé avec le modèle présenté dans [11]. (b) : Ce modèle est un modèle cartésien considérant un anneau de fluide au lieu d’un disque, et posant une hypothèse de petit inter-rayon.

ci-dessus. Comme ces ondes sont localisées et d’une structure spirale bien définie, Robert Ecke a eu l’idée de les décrire comme des structures quasi unidimensionnelles, la coordonnée pertinente étant l’abscisse curviligne

$$x = r \varphi \quad (4.19)$$

avec r le rayon considéré (légèrement inférieur au rayon extérieur du disque) et φ l’angle d’azimut. Effectivement le travail expérimental présenté dans Ning & Ecke (1993) puis surtout Liu & Ecke (1997, 1999) a établi la validité du modèle de Ginzburg-Landau standard, c’est-à-dire *local*, (4.2), pour décrire la dynamique de ces ondes et leurs propriétés de stabilité secondaire en régime faiblement non linéaire. Ces travaux expérimentaux ont motivé divers travaux théoriques, concernant les propriétés linéaires (par exemple Goldstein et al. 1993; Herrmann & Busse 1993) et faiblement non linéaires (Kuo & Cross 1993) des ondes de bord. On pouvait remarquer en 2000 un désaccord important entre la mesure effectuée par Liu & Ecke (1999) de la différence entre les coefficients de décalage en fréquence par variation du Rayleigh et du nombre d’onde, réduite en unité du temps caractéristique de l’instabilité,

$$(c_0 - c_1)/\tau|_{expé.} = 4.2, \quad (4.20a)$$

et la prédiction correspondante donnée par Kuo & Cross (1993),

$$(c_0 - c_1)/\tau|_{théo.} = 14.4, \quad (4.20b)$$

dans les deux cas pour un nombre de Prandtl $P = 6.3$ (celui de l’eau à température ambiante!) et un nombre d’Ekman $E = 1/274$. Réalisant que ce désaccord venait sans doute de l’usage par Kuo & Cross (1993) de conditions de *glissement sans frottement* sur les parois horizontales¹⁵, j’ai décidé de développer un modèle avec des conditions d’*adhérence* à toutes les parois. Par contre, afin de conserver une géométrie simple, j’ai posé une hypothèse de petit inter-rayon, i.e. considéré un domaine fluide annulaire défini en coordonnées cylindriques par

$$(r, \varphi, z) \in]r_e - \Gamma h, r_e[\times \mathbb{R} \times]-h/2, h/2[\quad (4.21)$$

avec $\Gamma h \ll r_e$. En négligeant les effets de courbure de l’anneau, j’ai donc posé un modèle cartésien avec x défini par (4.19) avec $r = r_e$ et $y = r_e - r$ (figure 4.4b), en gardant un rapport d’aspect Γ *quelconque* dans l’espoir de faire d’une pierre deux coups :

¹⁵Hypothèse qui permet une séparation des variables pour le calcul des modes linéaires du problème.

- D'une part un modèle avec $\Gamma \ll \text{grand}$ devait permettre de décrire de façon réaliste les ondes de bords (puisqu'elles sont localisées près du bord extérieur le bord intérieur ne les influence pas), et si possible de faire mieux que Kuo & Cross (1993), i.e. de résoudre le problème (4.20) ;
- D'autre part un modèle avec $\Gamma = 1$ devait permettre de réviser l'étude théorique effectuée par Hecke & Saarloos (1997) de la *convection tournante dans un canal annulaire de section carrée*, qui prédisait notamment la possibilité intéressante d'atteindre des régimes de turbulence faible.

Sachant que Hecke & Saarloos (1997) et sans doute aussi Kuo & Cross (1993) n'ont résolu que l'équation de la vorticité, sans se préoccuper de la contrainte non locale (4.3b)¹⁶, un autre enjeu de cette étude était bien entendu de clarifier la possibilité d'une singularité aux grandes échelles dans ces systèmes, et donc la question de la *validité des modèles de Ginzburg-Landau locaux* que ces auteurs ont proposé.

Pour une présentation plus détaillée des modèles utilisés, qui possèdent notamment quelques variantes en ce qui concerne les conditions limites thermiques, la lecture de l'article [11] reproduit en annexe K sera profitable. Mentionnons seulement que les paramètres de contrôle sont, outre le rapport d'aspect Γ , le nombre de Prandtl P , le nombre de Rayleigh Ra et le nombre de Coriolis

$$\eta = 2E^{-1}$$

avec E le nombre d'Ekman.

4.2.2 Étude d'un modèle « général » et mise en évidence du mode global

Dans cette section, je vais donner une présentation nouvelle de la partie de [11] qui correspond au calcul du mode global, en montrant notamment que la plupart des phénomènes rencontrés dans des modèles bidimensionnels section 4.1 se retrouvent dans des modèles tridimensionnels. Avant de parler de tels effets non linéaires, il convient cependant de mentionner quelques résultats linéaires importants. D'une part, il s'avère qu'effectivement des modèles avec $\Gamma \gtrsim 4$ sont capables de décrire correctement des ondes de bord. D'autre part il apparaît que l'usage de conditions limites d'*adhérence* à toutes les parois est bénéfique, puisqu'il permet de réduire sensiblement les désaccords entre les expériences de Liu & Ecke (1999) et la théorie ; voir à ce sujet les 7 premières colonnes du tableau I de [11], reproduit page 190. Cet accord porte aussi sur la forme même des ondes : ainsi la figure 4.4d présente des isothermes d'un mode linéaire calculé numériquement grâce au modèle cartésien avec un rapport d'aspect $\Gamma = 5$, et en repliant la bande plane en un anneau de rayon intérieur nul. Malgré le fait que cette reconstruction ne respecte pas (du tout !) l'hypothèse de petit inter-rayon, on constate un accord satisfaisant avec la photographie expérimentale de la figure 4.4c.

Pour l'analyse faiblement non linéaire, comme on l'a fait en convection des nématiques, on a intérêt à introduire un vecteur d'état local V qui se compose du vecteur vitesse \mathbf{v} d'une part et

¹⁶Ceci ne transparait pas dans leurs articles, un peu trop brefs quand il s'agit d'explicitier les méthodes de calcul ! La lecture du chapitre 2 de Hecke (1996) permet cependant, pour ce qui concerne son travail, de conclure sans ambiguïté à ce sujet.

de l'écart θ entre la température et sa valeur dans la solution de conduction pure d'autre part. Le but est alors de calculer des solutions paquets d'onde de la forme

$$V = W + W^* + V_{passifs} \quad (4.22)$$

avec¹⁷

$$W = \sum_{k \ll q} \hat{A}(q+k) \exp(ikx) V_1(q) = A(x,t) V_1(q) \quad (4.23)$$

définissant la partie active de la solution,

$$V_1(q) = (\tilde{\mathbf{v}}_1(y,z), \tilde{\theta}_1(y,z)) \exp[i(qx - \omega t)] \quad (4.24)$$

le mode complexe critique de convection calculé par analyse linéaire numérique.

De même que section 4.1.1, la première chose à faire en non-linéaire est de calculer le **mode homogène**. À cause de la tridimensionnalité du problème, le champ de vitesse correspondant ne peut être décrit par une seule fonction courant, mais on doit calculer séparément d'une part la fonction courant $\Psi_H(y,z)$ qui définit ses composantes transverses, d'autre part sa composante azimuthale $u_H(y,z)$, de sorte qu'au bilan

$$\mathbf{v}_H(y,z) = u_H \hat{\mathbf{x}} + \partial_z \Psi_H \hat{\mathbf{y}} - \partial_y \Psi_H \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.25)$$

Une autre complication engendrée par la tridimensionnalité est le fait que, contrairement à ce qui se passait dans les modèles bidimensionnels traités section 4.1, des couplages thermohydrodynamiques existent même au niveau du mode homogène, i.e. celui-ci comprend un champ de température non trivial $\theta_H(y,z)$:

$$\boxed{V_H = (\mathbf{v}_H, \theta_H)} \quad \text{qui donnera } V_{passifs}^H = \langle |A(x,t)|^2 \rangle_x V_H \quad (4.26)$$

comme au niveau de (4.4). L'une des équations d'élimination quasi statique qui permettent de calculer le mode homogène est l'équation de Navier-Stokes azimuthale moyenne, analogue de l'équation (4.3),

$$0 = \Delta u_H + \eta \partial_z \Psi_H + P^{-1}(\partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz}), \quad (4.27a)$$

qui ne suffit pas cependant d'un point de vue hydrodynamique, puisque u_H et Ψ_H sont inconnues. Bien entendu il faut adjoindre à cette équation l'équation de la vorticité. Comme les composantes y et z de celle-ci s'obtiennent par dérivations partielles de (4.27a) par rapport à z et y , seule la composante azimuthale de l'équation de la vorticité

$$0 = -\Delta \Delta \Psi_H + \eta \partial_z u_H + \partial_y \theta_H + P^{-1}[(\partial_y^2 - \partial_z^2) \tau_{yz} + \partial_y \partial_z (\tau_{zz} - \tau_{yy})] \quad (4.27b)$$

doit être résolue ; notez la présence du terme de couplage thermohydrodynamique susmentionné. Finalement pour calculer θ_H il faut résoudre l'équation de la chaleur moyenne

$$0 = \Delta \theta_H - Ra \partial_y \Psi_H - \partial_y \langle v_1 \theta_1 \rangle_x - \partial_z \langle w_1 \theta_1 \rangle_x \quad (4.27c)$$

¹⁷L'écriture (4.23) n'est en fait valable strictement que pour les calculs non linéaires. Pour les calculs linéaires, non présentés ici, on part plutôt d'une expression utilisant les modes propres de nombre d'onde $q+k$, expression donnée par l'équation (18a) de [11], dont (4.23) est une approximation ; voir aussi à ce sujet l'équation (4.1a) et la discussion qui s'ensuit.

en notant

$$(\mathbf{v}_1, \theta_1) = (u_1 \hat{\mathbf{x}} + v_1 \hat{\mathbf{y}} + w_1 \hat{\mathbf{z}}, \theta_1) = V_1(q) + V_1^*(q) \quad (4.28)$$

le mode réel critique. On peut remarquer dans (4.27a) et (4.27b), par rapport au cas bidimensionnel, l'intervention de termes proportionnels à η dûs à l'accélération de Coriolis, ainsi que celle de nouvelles composantes diagonales et non diagonales du tenseur de Reynolds

$$\overline{\tau} = - \langle \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 \rangle_x . \quad (4.29)$$

Dans le cas où l'onde primaire (4.24) est une onde de bord, une résolution numérique du problème (4.27) conduit à un mode homogène localisé comme celle-ci près du bord extérieur $y = 0$ (figure 4.5). En sus d'une correction de température de forme classique (figure 4.5c), correspondant à un réchauffement (resp. refroidissement) de la couche supérieure (resp. inférieure), liés au transport convectif de la chaleur, et de petits rouleaux secondaires transverse liés à cette correction de température (figure 4.5c), on note la création d'un fort écoulement « zonal » rétrograde (figure 4.5a,b).

Il convient, comme dans le cas bidimensionnel (section 4.1.1), de rajouter à (4.26) la **contribution des « longues » longueurs d'ondes**

$$V_{passifs}^L = [|A(x,t)|^2 - \langle |A(x,t)|^2 \rangle_x] V_L \quad \text{avec} \quad \boxed{V_L = (u_L \hat{\mathbf{x}} + v_L \hat{\mathbf{y}} + w_L \hat{\mathbf{z}}, \theta_L)} . \quad (4.30)$$

Elle se calcule, du point de vue hydrodynamique, à partir de l'équation de la vorticité considérée dans la limite d'un nombre d'onde $k \rightarrow 0$ avec $k \neq 0$, soit, après division par $\exp(ikx)$,

$$0 = \Delta(\partial_y w_L - \partial_z v_L) + \eta \partial_z u_L + \partial_y \theta_L + P^{-1} [(\partial_y^2 - \partial_z^2) \tau_{yz} + \partial_y \partial_z (\tau_{zz} - \tau_{yy})], \quad (4.31a)$$

$$0 = \Delta(\partial_z u_L) + \eta \partial_z v_L + P^{-1} \partial_z (\partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz}), \quad (4.31b)$$

$$0 = \Delta(-\partial_y u_L) + \eta \partial_z w_L - P^{-1} \partial_y (\partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz}). \quad (4.31c)$$

À ces équations il faut joindre l'équation de la chaleur dans la même limite soit, toujours après division par $\exp(ikx)$,

$$0 = \Delta \theta_L + Ra w_L - \partial_y \langle v_1 \theta_1 \rangle_x - \partial_z \langle w_1 \theta_1 \rangle_x . \quad (4.31d)$$

De l'équation d'incompressibilité dans la limite de grande échelle,

$$iku_L \exp(ikx) + \partial_y v_L \exp(ikx) + \partial_z w_L \exp(ikx) = 0 , \quad (4.32)$$

on ne peut plus déduire comme dans le cas bidimensionnel que les composantes d'écoulements transverses sont négligeables en première approximation, mais seulement qu'en première approximation

$$\partial_y v_L + \partial_z w_L = 0 , \quad (4.33)$$

d'où l'existence d'une « fonction courant de grande échelle » $\Psi_L(y, z)$ telle que

$$v_L = \partial_z \Psi_L \quad \text{et} \quad w_L = -\partial_y \Psi_L . \quad (4.34)$$

D'autre part une intégration par rapport aux variables transverses y et z de (4.32) montre, compte tenu des conditions d'adhérence aux parois, que l'écoulement azimuthal de grande échelle est à *débit nul* :

$$\langle u_L \rangle_{yz} = 0 \quad (4.35)$$

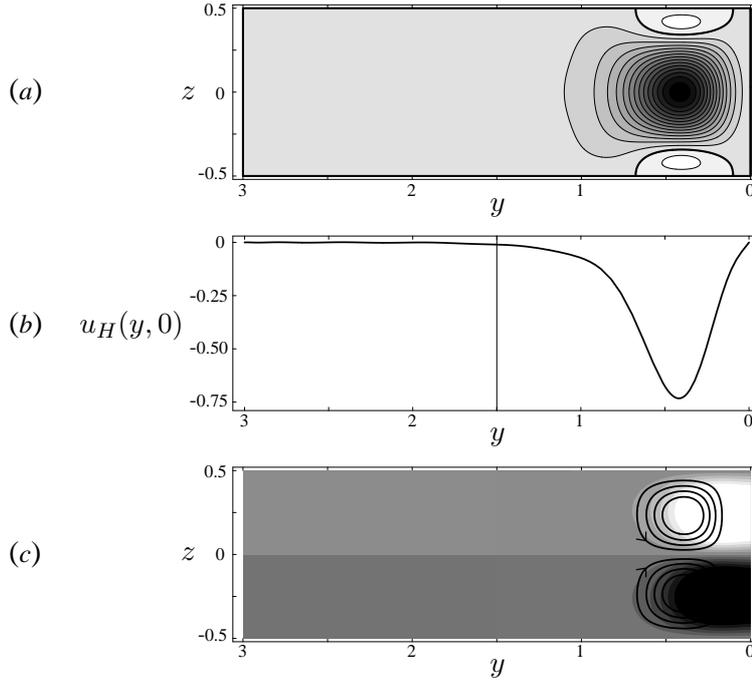


Fig. 4.5 – Exemple de *mode homogène* créé par une onde de bord pour $\Gamma = 3$, $P = 6.3$, $\eta = 200$, normalisé physiquement par multiplication par $|A|^2$ où A est l’amplitude calculée par l’équation de Landau pour $Ra = 1.1Ra_c$ [11]. (a) : Lignes de niveau de la vitesse azimuthale $u_H(y, z)$; la ligne épaisse est l’isoligne $u_H = 0$. (b) : Profil $u_H(y, 0)$ en milieu de couche. (c) : Lignes de courant $\Psi_H(y, z) = \text{constante}$ de l’écoulement transverse; en niveaux de gris une représentation du champ de température $\theta_H(y, z)$.

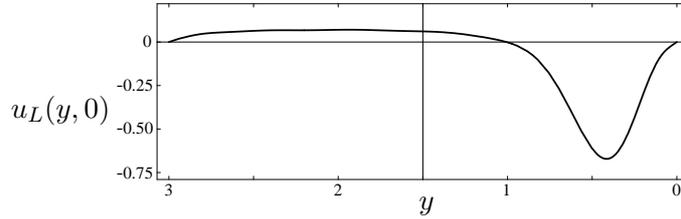


Fig. 4.6 – Exemple d’*écoulement azimuthal de grande échelle* créé par une onde de bord dans les mêmes conditions que figure 4.5 : profil $u_L(y, 0)$ [11].

comme dans le cas bidimensionnel (cf. l’équation 4.6 et la figure 4.2c). Comme les termes non linéaires qui créent l’écoulement u_L sont dûs aux mêmes contraintes de Reynolds que celles qui créent l’écoulement u_H , on s’attend à un écoulement qui possède une forme proche, non globalement rétrograde cependant pour satisfaire (4.35). C’est ce que montre effectivement la figure 4.6 obtenue par un calcul numérique : en milieu de couche, une zone prograde est visible près du bord intérieur, et dans la zone rétrograde près du bord extérieur l’écoulement u_L est un peu moins fort que l’écoulement u_H (comparer les figures 4.5b et 4.6).

En utilisant (4.34), on peut récrire (4.31b) et (4.31c) sous la forme

$$\partial_z[\Delta u_L + \eta \partial_z \Psi_L + P^{-1}(\partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz})] = \partial_y[\Delta u_L + \eta \partial_z \Psi_L + P^{-1}(\partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz})] = 0 ,$$

d’où l’existence d’une constante G telle que

$$0 = G + \Delta u_L + \eta \partial_z \Psi_L + P^{-1}(\partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz}) , \quad (4.36a)$$

soit encore, après multiplication par $\exp(ikx)$,

$$0 = G \exp(ikx) + \Delta u_L \exp(ikx) + \eta \partial_z \Psi_L \exp(ikx) + P^{-1}(\partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz}) \exp(ikx) \quad (4.36b)$$

qui montre que, comme dans le cas bidimensionnel, les écoulements de grande échelle sont associés à des gradients de pression de grande échelle. Ainsi toutes les spécificités des modes homogène et de grande échelle résumées sur la figure 4.2 sont valables aussi pour ce modèle tridimensionnel.

Lorsque l'on somme les contributions homogène (4.26) et de grande échelle (4.30) à la partie passive de la solution, on obtient, d'une façon strictement identique à ce qui a été vu section 4.1.1,

$$V_{passifs}^{HL} = |A(x, t)|^2 V_L + \langle |A(x, t)|^2 \rangle_x V_G \quad (4.37a)$$

à condition d'introduire le *mode global*

$$V_G = V_H - V_L = (u_G \hat{\mathbf{x}} + \partial_z \Psi_G \hat{\mathbf{y}} - \partial_y \Psi_G \hat{\mathbf{z}}, \theta_G) . \quad (4.37b)$$

L'écriture en terme d'une fonction courant $\Psi_G = \Psi_H - \Psi_L$ des composantes transverses de son champ de vitesse résulte de (4.25) et (4.34). Ses composantes sont solution, d'une part de l'équation obtenue en soustrayant (4.36a) à (4.27a),

$$0 = -G + \Delta u_G + \eta \partial_z \Psi_G , \quad (4.38a)$$

d'autre part de l'équation obtenue en soustrayant (4.31a) à (4.27b),

$$0 = -\Delta \Delta \Psi_G + \eta \partial_z u_G + \partial_y \theta_G , \quad (4.38b)$$

enfin de l'équation obtenue en soustrayant (4.31d) à (4.27c),

$$0 = \Delta \theta_G - Ra \partial_y \Psi_G . \quad (4.38c)$$

Ces trois équations, qui correspondent à l'équation de Navier-Stokes azimuthale, l'équation de la vorticité azimuthale et l'équation de la chaleur, montrent que le mode global est *l'écoulement et la perturbation de température que créeraient un gradient de pression moyen $G\hat{\mathbf{x}}$ de petite amplitude*, interprétation qui correspond là encore à une généralisation naturelle de l'interprétation du mode global donnée en bidimensionnel (cf. l'équation 4.12 et la discussion qui s'ensuit).

Une résolution numérique du problème linéaire inhomogène (4.38) est possible, en prenant par exemple $G = 1$, d'où un *mode global normalisé*

$$V_G^0 = (u_0 \hat{\mathbf{x}} + \partial_z \Psi_0 \hat{\mathbf{y}} - \partial_y \Psi_0 \hat{\mathbf{z}}, \theta_0) , \quad (4.39)$$

et dans [11] j'ai vérifié que le quotient $(V_H - V_L)/V_G^0$ est effectivement constant, ce qui m'a d'ailleurs donné la valeur de G . Un exemple de mode global est montré sur la figure 4.7. Pour ce qui est de sa composante azimuthale, on observe un profil ressemblant à celui d'un écoulement de Poiseuille dans une conduite de section rectangulaire : cet écoulement, qui n'est plus localisé près du bord extérieur (contrairement à l'écoulement moyen de la figure 4.5), mérite donc à double titre sa qualification de « global » ou « non local » !

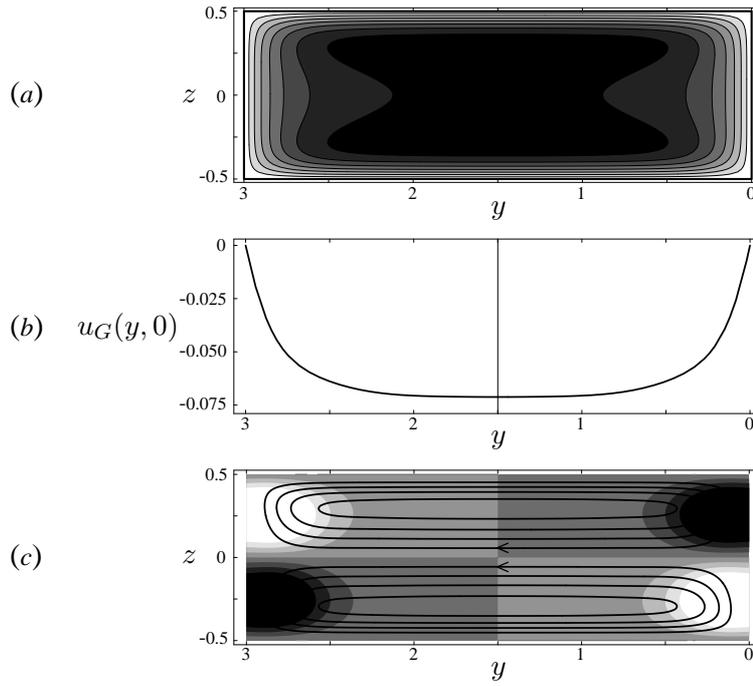


Fig. 4.7 – Exemple de *mode global* créé par une onde de bord dans les mêmes conditions que figure 4.5 i.e. $\Gamma = 3$, $P = 6.3$, $\eta = 200$, $Ra = 1.1Ra_c$ [11]. (a) : Lignes de niveau de la vitesse azimutale $u_G(y, z)$, partout négative. (b) : Profil $u_G(y, 0)$. (c) : Lignes de courant $\Psi_G(y, z) = \text{constante}$ de l'écoulement global transverse ; en niveaux de gris une représentation du champ de température $\theta_G(y, z)$.

Un point important¹⁸ est que l'on peut, comme dans le cas bidimensionnel d'ailleurs, obtenir la valeur du « gradient de pression » inconnu G sans effectuer le calcul explicite du mode non linéaire V_L , mais à partir des calculs des seuls modes non linéaire V_H et linéaire V_G^0 . En effet, de la propriété (4.35) spécifiant que le mode de grande échelle est à débit nul, et de la définition du mode global (4.37b), on déduit immédiatement que

$$\langle u_G \rangle_{yz} = \langle u_H \rangle_{yz} . \quad (4.40)$$

Comme d'autre part on est assuré de ce que

$$u_G = Gu_0 ,$$

on obtient

$$G = \frac{\langle u_H \rangle_{yz}}{\langle u_0 \rangle_{yz}} . \quad (4.41)$$

Cette formule, similaire aux formules (4.14) du cas bidimensionnel, nous montre encore que *l'origine de la singularité aux grandes échelles*, $V_H \neq V_L$ i.e. $V_G \neq 0$, *est l'existence éventuelle d'un écoulement moyen à débit non nul*

$$\langle u_H \rangle_{yz} \neq 0 , \quad (4.42)$$

qui ne peut donc donner aussi la forme des écoulements de grande échelle (figure 4.2c)...

¹⁸Que je n'avais pas réalisé au moment où [11] a été rédigé.

Bien entendu, au final, c'est-à-dire à l'ordre non linéaire cubique, on obtient par rétroaction l'équation de Ginzburg-Landau non locale (4.17), dans laquelle le coefficient de couplage global δ est proportionnel à G .

4.2.3 Étude analytique de la limite des grands rapports d'aspect

Dans [11] une étude numérique de la *limite des grands rapports d'aspect*¹⁹ $\Gamma \rightarrow +\infty$, pertinente pour des ondes de bord dans un « grand » disque, ce qui est en fait le cas dans les expériences de Liu & Ecke (1999), et correspond aussi à la géométrie du modèle de Kuo & Cross (1993), a été présentée. D'un point de vue énergétique, il est clair qu'un écoulement associé à une onde de bord localisée ne peut fournir des contraintes de Reynolds capable de créer un écoulement global envahissant toute une bande de très grande taille, et donc on s'attend à ce que

$$\lim_{\Gamma \rightarrow +\infty} G(\Gamma) = 0, \quad (4.43)$$

les autres paramètres de contrôle (P et η) étant fixés. Cette propriété est importante car on en déduit que le coefficient de couplage global δ dans (4.17) est négligeable dans un grand disque, ce qui justifie *a posteriori* l'usage d'une équation de Ginzburg-Landau *locale*.

On aimerait cependant donner une preuve formelle de (4.43), voire même, en bon physicien, préciser la loi de décroissance de $G(\Gamma)$, par exemple établir une loi d'échelle de la forme

$$G(\Gamma) \sim G_0 \Gamma^\alpha \quad (4.44)$$

quand $\Gamma \rightarrow +\infty$. Sur la base d'ajustements numériques, j'ai annoncé dans [11] un exposant α de l'ordre de -1.1 . Je suis maintenant capable de démontrer analytiquement que l'exposant correct est tout simplement -1 .

Pour cela il faut réaliser que le problème physique qui définit le mode global normalisé $V_G^0(y, z)$ soit (4.38) avec $G = 1$,

$$(\partial_y^2 + \partial_z^2)u_0 + \eta \partial_z \Psi_0 = 1, \quad (4.45a)$$

$$-(\partial_y^2 + \partial_z^2)^2 \Psi_0 + \eta \partial_z u_0 + \partial_y \theta_0 = 0, \quad (4.45b)$$

$$(\partial_y^2 + \partial_z^2)\theta_0 - Ra \partial_y \Psi_0 = 0, \quad (4.45c)$$

devient unidimensionnel loin des bords $y = 0, \Gamma$ lorsque Γ est grand. Dans cette région on peut supposer $\partial_y = 0$ et la solution bidimensionnelle s'approche, comme cela est démontré sur la figure 4.8 en ce qui concerne la composante u_0 , de la solution unidimensionnelle de

$$\partial_z^2 u_0 + \eta \partial_z \Psi_0 = 1, \quad (4.46a)$$

$$-\partial_z^4 \Psi_0 + \eta \partial_z u_0 = 0, \quad (4.46b)$$

$$\partial_z^2 \theta_0 = 0. \quad (4.46c)$$

Une propriété sympathique de ce problème est le découplage entre les équations hydrodynamiques (4.46a), (4.46b) et l'équation de la chaleur (4.46c), qui indique d'ailleurs que θ_0 tend vers

¹⁹Rappelons que Γ est le quotient de l'inter-rayon du canal annulaire par sa hauteur, cf. l'équation (4.21).

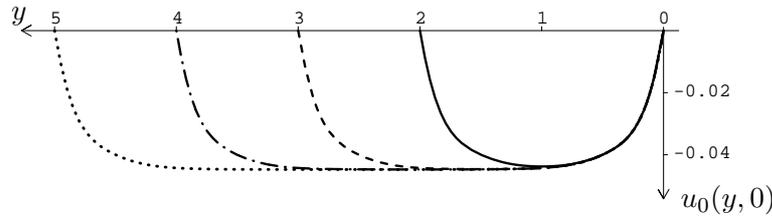


Fig. 4.8 – Pour $\eta = 200$: profils en milieu de couche ($z = 0$) de la composante azimuthale u_0 des *modes globaux normalisés* calculés par résolution numérique de (4.45) pour différents rapports d'aspects $\Gamma = 5, 4, 3, 2$ de gauche à droite.

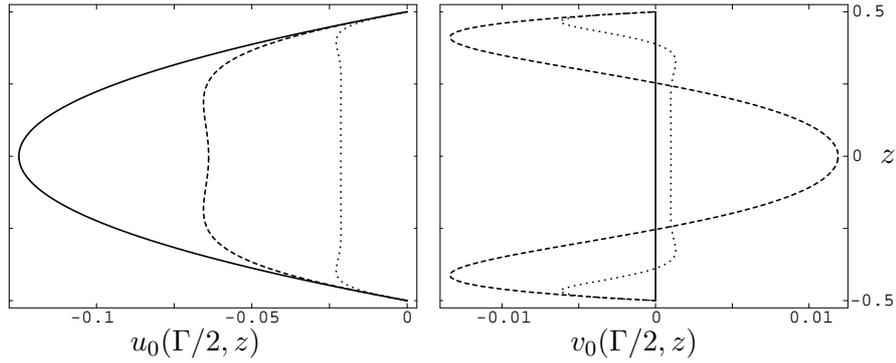


Fig. 4.9 – Dans la limite de grands rapports d'aspects, profils verticaux au milieu du canal ($y \simeq \Gamma/2$) des composantes azimuthale u_0 et centripète v_0 des *modes globaux normalisés* d'écoulement (4.47) en convection annulaire tridimensionnelle tournante à différents nombres de Coriolis $\eta = 2E^{-1}$: courbe continue $\eta = 0$; courbe tiretée $\eta = 100$; courbe pointillée $\eta = 1000$.

0 loin des bords $y = 0, \Gamma$ lorsque $\Gamma \rightarrow +\infty$, tout comme $w_0 = -\partial_y \Psi_0$ d'ailleurs. Quant aux équations hydrodynamiques (4.46a) et (4.46b), il faut les munir des conditions limites

$$u_0 = \Psi_0 = \partial_z \Psi_0 = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm 1/2 ,$$

et utiliser les propriétés de parité de u_0 et imparité de Ψ_0 sous $z \mapsto -z$ pour les résoudre. Il semble d'autre part plus physique de donner la forme de $v_0 = \partial_z \Psi_0$ plutôt que celle de Ψ_0 elle même. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} u_0 &= E [a \cos(\mu z) \cosh(\mu z) + b \sin(\mu z) \sinh(\mu z) + c] , \\ v_0 &= E [a \sin(\mu z) \sinh(\mu z) - b \cos(\mu z) \cosh(\mu z) + 1/2] , \end{aligned} \quad (4.47)$$

à condition de poser maintenant

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{\eta/2} = E^{-1/2} , \\ a &= \{[\sin(\mu/2) - \mu \cos(\mu/2)] \cosh(\mu/2) + \cos(\mu/2) \sinh(\mu/2)\} / (\sin \mu - \sinh \mu) , \\ b &= \{\sin(\mu/2) \cosh(\mu/2) - [\cos(\mu/2) + \mu \sin(\mu/2)] \sinh(\mu/2)\} / (\sin \mu - \sinh \mu) , \\ c &= \frac{1}{2} \{[\mu(\cos \mu + \cosh \mu) - (\sin \mu + \sinh \mu)]\} / (\sin \mu - \sinh \mu) . \end{aligned}$$

Ces écoulements sont représentés sur la figure 4.9 ; on peut se convaincre par une comparaison avec la figure 4.7 que ce calcul est pertinent dès que $\Gamma \gtrsim 3$. On peut aussi signaler que dans

la limite continue des très faibles rotations $\eta \rightarrow 0$ i.e. $E \rightarrow +\infty$ on retrouve naturellement un écoulement de Poiseuille

$$\boxed{u_0 = -\frac{1}{8}(1 - 4z^2), \quad v_0 = 0} \quad (4.48)$$

Par contre, en rotation rapide, lorsque E devient petit tandis que μ devient grand, on obtient des profils d'écoulements constants en dehors de couches d'Ekman d'épaisseur $1/\mu = E^{1/2}$. Un autre résultat important déduit de la convergence observée figure 4.8 est que, lorsque $\Gamma \rightarrow +\infty$, la valeur moyenne par rapport à y et z de $u_0(y, z)$ tend vers la valeur moyenne par rapport à z de la solution asymptotique $u_0(z)$, soit, d'après (4.47),

$$\langle u_0 \rangle_{yz} \longrightarrow M_0(E) = E^{3/2} \frac{(2 + \mu^2) \cosh \mu + (\mu^2 - 2) \cos \mu - 2\mu(\sin \mu + \sinh \mu)}{2(\sin \mu - \sinh \mu)}. \quad (4.49)$$

Physiquement, il est intéressant de remarquer que, quand $E \rightarrow 0$, cette valeur moyenne tend vers 0 comme $-\frac{1}{2}E^{1/2}$, d'une façon similaire à ce qui a été remarqué dans le modèle bidimensionnel (cf. la discussion qui suit l'équation 4.13b). Ceci est maintenant dû directement à la force de Coriolis qui tend à bidimensionnaliser l'écoulement, ce qui est incompatible avec la géométrie de celui-ci.

Au bilan, comme une onde de bord ne « nourrit » un écoulement moyen que localisé près de ce bord (cf. la figure 4.5a,b), celui-ci n'évolue plus lorsque le rapport d'aspect Γ diverge, et en conséquence

$$\langle u_H \rangle_{yz} = \frac{1}{\Gamma} \int_0^\Gamma \int_{-1/2}^{1/2} u_H(y, z) dy dz \sim \frac{1}{\Gamma} M(P, E) \quad (4.50)$$

quand $\Gamma \rightarrow +\infty$. La formule (4.41) conduit donc à

$$\boxed{G = \frac{\langle u_H \rangle_{yz}}{\langle u_0 \rangle_{yz}} \sim \frac{1}{\Gamma} \frac{M(P, E)}{M_0(E)}} \quad (4.51)$$

quand $\Gamma \rightarrow +\infty$: *l'intensité des effets non locaux décroît proportionnellement à l'inverse de la « taille » (= la section) du canal.*

Ainsi *les effets non locaux sont négligeables dans un grand canal ou un grand disque*, c'est-à-dire dans les cas étudiés expérimentalement par Liu & Ecke (1999) et théoriquement par Kuo & Cross (1993). Ceci nous permet notamment d'étudier l'effet de l'usage des conditions limites d'adhérence à toutes les parois sur la comparaison entre expériences et modèles, et effectivement les 2 dernières colonnes du tableau I de [11], reproduit page 190, montre que là encore ces conditions limites plus réalistes sont bénéfiques.

4.2.4 Cas de « petits » rapports d'aspect

Au contraire de ce qui précède, dans un *canal de section carrée* $\Gamma = 1$, correspondant au système étudié par Hecke & Saarloos (1997)²⁰, on n'a plus affaire à des « ondes de bord » mais

²⁰Hecke & Saarloos (1997) ont utilisé des conditions limites de *glissement sans frottement sur les parois horizontales* légèrement différentes de celles utilisées dans [11]. Cependant on s'attend, en rotation rapide, à ce que ces conditions limites aient assez peu d'influence sur les structures convectives.

à des ondes qui occupent tout le canal. En conséquence elles peuvent « nourrir » un écoulement moyen qui occupe tout le canal, et c'est effectivement ce qui se produit lorsque le nombre de Prandtl est faible, comme le montre la figure 9 de [11] reproduite page 197. Cet écoulement moyen est, pour $\eta \gtrsim 200$, globalement rétrograde : ainsi

$$\langle u_H \rangle_{yz} < 0 ,$$

donc d'après le critère (4.42) on s'attend à des *effets non locaux* en contradiction avec ce qu'avaient prévu Hecke & Saarloos (1997). Pour une discussion détaillée, qui présente aussi une étude de quelques effets liés aux conditions limites hydrodynamiques et thermiques, je vous invite à vous reporter à l'article [11] reproduit en annexe K. Mentionnons seulement l'absence de régime d'ondes modulées ou de turbulence faible²¹, et le fait que *les effets non locaux brisent le lien entre les différents coefficients de décalage fréquentiel des ondes faiblement non linéaires et l'expression du seuil d'instabilité secondaire d'Eckhaus*, cf. la section VI et la figure 8 de [11].

²¹En contradiction, là encore, avec Hecke & Saarloos (1997).

Compléments d'information et perspectives

Au terme de cette présentation synthétique de certains de mes travaux de recherche, il convient dans un premier temps d'apporter quelques compléments d'information concernant d'autres travaux déjà achevés ou « en cours ».

§ § §

J'ai étudié la compétition entre modes moyen, de grande et de petite échelle dans un autre cadre que celui de la convection tournante abordé dans le chapitre 4, à savoir celui des *instabilités de convections de cristaux liquides nématiques*. La section V de [7] présente en effet une étude relativement exhaustive des couplages entre divers *modes de rouleaux primaires*, de vecteurs d'ondes normaux ou obliques, représentés par une enveloppe $A(y, t)$, des *modes de torsion moyen ou de grande échelle du champ de directeur* décrits par une enveloppe $\varphi(y, t)$, et enfin des *écoulements de grande échelle* décrits par une enveloppe $G(y, t)$. Le système d'équations d'enveloppes couplées (47) de [7] permet par exemple une description correcte de l'instabilité secondaire ondulations-zig-zags, qui résout en particulier le problème soulevé page 18 de ce mémoire (voir plus précisément la note numéro 7 du bas de cette page).

Il faut aussi signaler que, toujours en convections des nématiques, d'autres *modes moyens* que le mode de torsion du champ de directeur mentionné jusqu'à maintenant peuvent intervenir. D'une part un *mode d'éventail¹ du directeur*,

$$\delta \mathbf{n} = \cos[\pi z / (2h)] \hat{\mathbf{z}},$$

peut être excité par les couples magnétiques et visqueux non linéaires en présence d'un champ magnétique planaire. La compétition de ce mode moyen avec le mode moyen de torsion et les modes de petite échelle rouleaux a été traitée dans [8], fruit d'une collaboration entre l'équipe de Roland Ribotta, celle de Werner Pesch, et moi-même. D'autre part les rouleaux d'électroconvection créent à l'ordre quadratique en leur amplitude un *mode moyen de champ électrique* qui a pour conséquence d'altérer le *courant électrique* transmis par la couche. James Gleeson, expérimentateur à Kent State University, a proposé d'utiliser cette propriété pour développer

¹'Splay' en anglais.

une méthode de caractérisation quantitative globale des structures électroconvectives. Il a ainsi proposé de définir et mesurer des *nombres de Nusselt électriques*. J'ai complété son étude expérimentale par une étude théorique, et nos résultats ont été publiés dans [9].

§

Ce mémoire ne mentionne pas non plus une thématique à laquelle j'ai pourtant consacré, déjà, beaucoup de travail, à savoir les *instabilités de jets de liquides dans des gaz*. J'ai notamment co-encadré avec Jean-Pierre Brancher la thèse de Mohammad Haghbin, qui a étudié théoriquement les *instabilités de cisaillement d'un jet plan* de métal liquide dans un gaz neutre en présence d'un champ magnétique parallèle à la vitesse de base du jet. Un modèle *magnétohydrodynamique* non visqueux a été posé, qui représente un progrès par rapport au modèle de Witkowski & Marty (1997) puisqu'il autorise des modifications du champ magnétique par l'écoulement². Mohammad Haghbin a obtenu au terme de longs calculs une relation de dispersion explicite pour les ondes linéaires qui peuvent déstabiliser la configuration de base de ce système, et a commencé à analyser les phénomènes physiques que décrit cette relation. Je me propose maintenant de reprendre ces calculs pour terminer cette analyse, et rédiger une publication.

Cette étude, en partie motivée par la problématique de la mise au point de « *couvertures métalliques liquides* » pour protéger les parois des tokamaks dans lesquels devrait avoir lieu la fusion nucléaire contrôlée, pourra judicieusement être complétée par celle du cas où le champ magnétique est perpendiculaire à la vitesse de base du jet plan.

Toujours avec Jean-Pierre Brancher, et en complément d'études dans le cas de *jets ronds* cette fois-ci réalisées par son doctorant Karim Loueslati, je pourrais aussi m'intéresser au cas d'un champ magnétique perpendiculaire à la vitesse de base d'un jet rond. Un tel projet ferait alors l'objet d'une coopération entre notre équipe pour la partie théorique et l'équipe d'Yves Fautrelle et Jacqueline Étay au laboratoire Élaboration par Procédés Magnétiques à Grenoble pour la partie expérimentale.

§ § §

Ces compléments ayant été apportés, proposons maintenant quelques perspectives naturelles de prolongements possibles du travail présenté dans le corps de ce mémoire; la thématique générale qui donne à ces prolongements leur cohérence est celle des *ondes non linéaires*.

§ § §

²Alors que dans le modèle de Witkowski & Marty (1997) le champ magnétique est gelé i.e. égal à sa valeur de base, constante et uniforme.

D'une part l'*étude de la contrainte de Reynolds* créée par une *onde bidimensionnelle périodique par translations* mériterait d'être étendue au cas d'une *onde bidimensionnelle périodique par rotations*. Ce cas correspond en effet à la géométrie annulaire naturelle des modèles de convection tournante quasi géostrophiques de Pino et al. (2000, 2001), Aubert et al. (2003), Morin & Dormy (2004), etc... qui sont ainsi posés *en coordonnées polaires* (r, φ) *sans hypothèse de petit inter-rayon* ; ce cas peut aussi se trouver dans d'autres modèles, par exemple des modèles d'écoulements annulaires tournants cisailés, cf. par exemple Schaeffer & Cardin (2004a). On n'a donc plus affaire à un mode complexe d'onde linéaire en $\tilde{\mathbf{v}}_1(y) \exp[i(qx - \omega t)]$ mais

$$\tilde{\mathbf{v}}_1(r) \exp[i(m\varphi - \omega t)]$$

où m est maintenant le nombre d'onde azimuthal, et il s'agit d'établir une formule du type (1.40) mais pour la contrainte

$$\tau_{r\varphi} = -\rho \langle v_{1r} v_{1\varphi} \rangle_{\varphi} , \quad (1)$$

sachant que maintenant les opérateurs différentiels contiennent des termes liés à la courbure.

Cette étude est engagée avec Yannick Lebranchu, qui a commencé sa thèse sous ma direction et celle de Jean-Pierre Brancher en septembre 2004. Yannick Lebranchu, non content d'explicitier les mécanismes qui contrôlent la forme précise de la contrainte de Reynolds (1), ne s'arrêtera pas en si bon chemin, mais mènera une *étude systématique des ondes faiblement non linéaires dans les modèles bidimensionnels de convection tournante quasi géostrophique* en géométrie annulaire sans hypothèse de petit inter-rayon. Ces modèles, à l'instar de ceux présentés ici, présentent quelques variantes, notamment dues à la prise en compte ou non d'effets de pompage d'Ekman, et ceci donnera du piment à cette étude. Cette étude implique bien sûr un calcul systématique du *mode moyen zonal* et de sa rétroaction sur le mode primaire. Elle devrait nous permettre de mieux appréhender la limite des rotations très rapides, pour laquelle le modèle de Morin & Dormy (2004) par exemple donne des résultats (numériques) surprenants, à savoir des « *oscillations relaxantes* » très violentes à 1% du seuil seulement. En particulier la possibilité d'un changement de nature de la bifurcation primaire, qui pourrait devenir sous-critique en rotation très rapide, comme le suggèrent Morin & Dormy (2004) dans l'introduction de leur article, sera étudiée. Nous envisageons aussi de mener une comparaison systématique en régime faiblement non linéaire entre les résultats de nos modèles bidimensionnels et ceux des simulations numériques des modèles tridimensionnels de Simatev & Busse (2004), notamment en ce qui concerne la forme et l'intensité du mode moyen zonal. Cette étude sera intéressante pour la communauté scientifique puisque des extrapolations de modèles quasi géostrophiques bidimensionnels commencent à être utilisées pour la prédiction d'effets magnétohydrodynamiques tridimensionnels tels le fameux effet dynamo, cf. par exemple Schaeffer & Cardin (2004b).

Toujours concernant ces *modèles bidimensionnels de convection tournante*, l'universalité des phénomènes d'« *oscillations vacillantes* » en régime non linéaire est frappante. Ces oscillations à peu près en opposition de phase de l'amplitude du mode primaire et de l'amplitude de l'écoulement zonal correspondent à une version plus « douce » des oscillations relaxantes mentionnées plus haut. Elles ont été décrites pour la première fois dans le modèle de Busse le plus simple en conditions de glissement sans frottement par Or & Busse (1987); leur persistance dans le modèle en conditions d'adhérence a été montrée par Schnaubelt & Busse (1992); elles sont encore présentes dans le modèle plus sophistiqué de Morin & Dormy (2004). Bien entendu elles existent aussi dans les modèles tridimensionnels, comme l'ont par exemple montré Tilgner & Busse (1997). Comme une étude faite par Morin & Dormy (2004) montre que ces oscillations vacillantes peuvent être obtenues avec un code spectral ne gardant que les modes de nombre d'onde azimuthal 0 et $\pm m_c$, on peut conjecturer qu'un *modèle faiblement non linéaire étendu dans lequel on autoriserait un mode moyen à devenir actif* - modèle du type de ceux présentés dans le chapitre 3 - pourrait les capturer. Je me propose d'étudier ceci en coopération avec Friedrich Busse dans un avenir proche, avec l'espoir de pouvoir ainsi *mettre en évidence des comportements génériques liés à la compétition entre des modes de petite échelle³ et un mode moyen en (thermo)hydrodynamique⁴*.

§

Revenant aux *contraintes de Reynolds*, la contemplation des équations (4.27a) et (4.27b) ne peut que susciter la question suivante : *comment interpréter celles-ci dans le cas d'une onde tridimensionnelle... périodique par translations pour ne pas tout compliquer en même temps?* Je viens de commencer cette étude et je compte bien la poursuivre, car elle est pertinente non seulement dans le cadre faiblement non linéaire présenté ici, mais aussi pour des *phénomènes fortement non linéaires*, sans qu'il y ait nécessairement *instabilité* d'une solution de base! Il est en effet plus que temps de citer une « généralisation » très intéressante des scénarios étudiés dans ce mémoire, à savoir le « *procédé auto-entretenu* » décrit par Waleffe (1997) pour expliquer la *persistance de structures cohérentes dans des écoulements cisailés*. Ce procédé repose sur des couplages entre deux modes moyens (*the 'streamwise rolls' and the 'streaks' in English*) et une onde périodique par translations, une étape clé étant la rétroaction positive de l'onde sur les modes moyens exactement due aux contraintes de Reynolds, je cite :

*'The nonlinear feedback of the streak instability (l'onde)
on the streamwise rolls (un mode moyen)
is critical to the self-sustenance of the process'.*

On peut aussi noter que l'équation (6) de Waleffe (1997) est strictement analogue à notre équation

³Des études préliminaires ont été faites par l'équipe de Friedrich Busse, et elles suggèrent que deux modes primaires de nombres d'ondes proches voire égaux mais de profils transverses différents serraient impliqués. Cependant, d'après Friedrich lui-même, ces études préliminaires demandent à être reprises et finalisées.

⁴Je me permets de mettre une parenthèse autour du préfixe qui rappelle l'existence de couplages thermiques dans ces systèmes, car on peut estimer que des phénomènes proches doivent exister dans des systèmes purement hydrodynamiques... voir par exemple la perspective suivante, pas complètement déconnectée de celle-ci en fait!

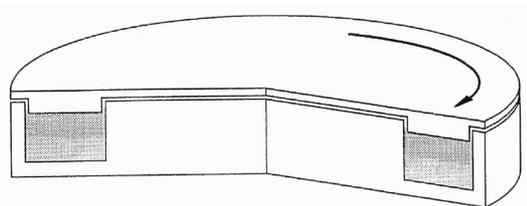
tion (4.27b), et mentionner que ce procédé auto-entretenu, dont l'existence a été établie par Waleffe (1997) dans le cas d'écoulements entre deux plans, existe aussi dans le cas d'écoulements dans une conduite rectiligne à section circulaire, système d'une très grande importance pratique ; là encore les contraintes de Reynolds jouent un rôle clé, je cite Wedin & Kerswell (2004) :

'The energetic feedback (of the wave) to the rolls is the essential nonlinear aspect of the cycle and since it is the most intricate and delicate to arrange must be considered the crucial link in the self-sustaining process advocated by Waleffe'...

Si le temps ou des moyens humains me le permettent, je pourrais prolonger cette étude en essayant de **développer un modèle faiblement non linéaire étendu du procédé auto-entretenu** de Waleffe (1997), que celui-ci a plutôt décrit à l'aide d'un modèle de Galerkin. Ce modèle, particulièrement simple et élégant, ne prend pas en compte les modes harmoniques de petite échelle engendrés par le mode « primaire » de petite échelle sélectionné ; or, en effectuant une analogie avec le cas des ondes de Tollmien-Schlichting, cf. la première ligne de la table 2.1 par exemple, on peut s'attendre à ce que ces modes harmoniques exercent une rétroaction importante sur le mode « primaire » lui-même. Un modèle faiblement non linéaire étendu, qui prendrait en compte ces rétroactions, pourrait éventuellement donner des informations intéressantes sur les ondes non linéaires en écoulements cisailés.

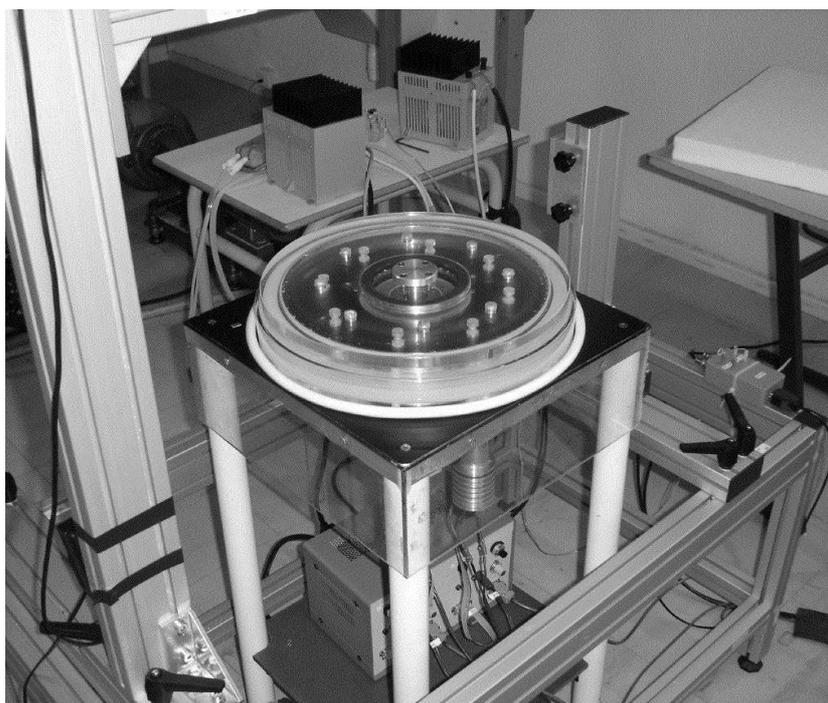
§

Un autre prolongement naturel consistera à **mettre en évidence expérimentalement des effets de couplage global** du type de ceux prévus théoriquement dans [10] et [12]. Après avoir envisagé de monter des expériences thermohydrodynamiques, par exemple une expérience de convection de Rayleigh-Bénard tournante, j'ai préféré mettre au point une expérience purement hydrodynamique, donc plus simple à réaliser. Cette expérience s'inspire de celle de Barthelet et al. (1995) et s'apparente à la famille des « *cavités rotor-stator* » que l'on retrouve dans certaines machines tournantes, et qui sont pour cette raison très étudiées (voir par exemple les travaux numériques Serre et al. 2001 ou Serre et al. 2002, et leurs bibliographies). L'expérience de Barthelet et al. (1995) consiste en un canal annulaire cisailé par un couvercle tournant, comme représenté sur le schéma de principe suivant tiré de leur article :



Cette expérience a été utilisée par l'équipe de François Charru en diphasique liquide-liquide et est maintenant utilisée par cette équipe en diphasique liquide-granulaire, cf. par exemple Charru et al. (2004). Par contre en monophasique elle n'a été utilisée qu'à des nombres de Reynolds inférieurs ou égaux à 500, pour lesquels l'écoulement de base axisymétrique est stable (Barthelet et al. 1995).

J'ai décidé de monter une expérience similaire mais en liquide monophasique et avec un inter-rayon beaucoup plus petit, i.e. un rapport inter-rayon sur rayon moyen de 0.095 au lieu de 0.2 chez Barthelet et al. (1995) ou 0.4 chez Serre et al. (2001), de façon à obtenir, à des nombres de Reynolds plus élevés que ceux des expériences de Toulouse, des ondes quasi unidimensionnelles. Une autre originalité consiste en la possibilité de faire tourner aussi le fond et les bords. Cette *expérience d'écoulements annulaires tournants cisailés* implique ainsi deux paramètres de contrôle indépendants aisément modifiables, à savoir les nombres de Reynolds haut et bas proportionnels aux vitesses de rotation des plateaux haut et bas. C'est Yannick Lebranchu, avec l'aide de l'atelier mécanique de l'ENSEM mené par Jean-Yves Morel, puis de l'atelier électronique du LEMTA mené par Alain Delconte, qui est en train de mettre au point cette expérience. Comme le montre cette photographie



prise le 19 avril, et sur laquelle on voit diverses infrastructures (boîtier électronique contenant les cartes de commande et d'asservissement des moteurs, alimentations des moteurs, etc...), les premières campagnes de mesures pourront bientôt commencer. Cette expérience devrait fournir des informations intéressantes sur les instabilités purement hydrodynamiques possibles dans ce système⁵, qui donneront naissance à des *ondes non linéaires* que l'on pourra en partie contrôler en jouant sur les nombres de Reynolds haut et bas. Elle devrait s'avérer assez riche grâce à cette possibilité, qui permettra par exemple en contrarotation pure d'obtenir un écoulement de base apparenté à l'écoulement de Couette plan, alors qu'en corotation rapide les forces de Coriolis joueront un rôle très important, et devraient conduire à une divergence du nombre d'onde azimuthal critique.

De façon à compléter cette étude expérimentale, j'ai pris contact avec Éric Serre, chargé de recherche CNRS, membre de l'équipe de Patrick Bontoux au Laboratoire de Modélisation

⁵En complément, répétons le, des études *diphases* effectuées par l'équipe de François Charru à nombre de Reynolds haut « faible », et à nombre de Reynolds bas nul.

et Simulation Numérique en Mécanique et Génie des Procédés à Marseille, pour développer en coopération avec lui une *étude numérique de ces écoulements*. En effet Éric Serre a développé des codes pseudo-spectraux dédiés à la simulation numérique directe de tels écoulements (cf. les références déjà citées plus haut, Serre et al. 2001 ou Serre et al. 2002) ; toutefois il s'intéressait jusqu'à maintenant à des comportements fortement non linéaires dans des cavités de grand inter-rayon. Après adaptation des paramètres géométriques et surtout développement de méthodes faiblement non linéaires spécifiques, nous avons récemment obtenus de premiers résultats, en établissant par exemple que, pour la géométrie de notre expérience lorsque seul le plateau haut est en rotation, l'écoulement axisymétrique perd sa stabilité pour un nombre de Reynolds (haut) égal à 1270 vis-à-vis d'une onde de nombre d'onde azimuthal 20, qui bifurque de manière sur-critique. Cette étude numérique se poursuit actuellement en étudiant des cas où les deux plateaux sont en corotation, et la possibilité ou non d'effets globaux importants en régime faiblement non linéaire.

§

En prenant un peu de hauteur, et dans l'éventualité où l'on me donnerait la chance d'animer une petite équipe qui se consacrerait à l'*étude des ondes non linéaires*, je peux proposer d'autres pistes pour des *travaux en régime fortement non linéaire*⁶ que celles esquissées pages 84 et 85. Je ne suis pas totalement néophyte dans le domaine fortement non linéaire puisqu'avec Werner Pesch et Friedrich Busse je me suis initié aux *méthodes de continuation* qui permettent de prolonger des solutions faiblement non linéaires en solutions fortement non linéaires : voir à ce sujet la figure 10 de [10], reproduite en annexe J page 185 de ce mémoire. Dans leur version la plus simple, ces méthodes sont réservées aux systèmes présentant une bifurcation, qui permet d'« attraper » d'abord des ondes faiblement non linéaires. Ainsi elles ne sont pas applicables telles quelles à des systèmes dans lesquels il n'existe pas de mécanismes linéaires d'instabilité i.e. pas de bifurcation, par exemple l'écoulement d'un fluide newtonien dans une conduite rectiligne à section circulaire, système d'une très grande importance pratique déjà évoqué page 85. Cependant Nagata (1990) a ouvert de nouvelles possibilités en proposant la démarche suivante : rajouter des forces ou des couplages nouveaux à un système ne présentant pas de bifurcation de façon à obtenir un nouveau « sur-système » présentant une bifurcation, « attraper » dans ce sur-système une solution de type onde bifurquée, puis la suivre par continuation en faisant décroître progressivement jusqu'à zéro les forces ou couplages artificiellement rajoutés, tout en « jouant » avec les paramètres de contrôle naturels pour éviter que cette solution ne disparaisse. Plus récemment, il a été réalisé que le sur-système utilisé peut ne pas avoir de réalité « physique », mais qu'il peut simplement être obtenu en rajoutant aux équations du mouvement des termes de forces artificiels qui imposeront la forme de solution que l'on subo-

⁶Non que tout soit connu sur les ondes *faiblement non linéaires*, loin de là ! Sans revenir sur les effets globaux que l'on vient de citer, on peut aussi mentionner les problèmes que posent la compétition, dans un système symétrique, entre des ondes (faiblement non linéaires) droite et gauche, cf. par exemple l'introduction de Riecke & Kramer (2000)...

dore pour des raisons, elles, physiques⁷. C'est cette démarche qui a été suivie avec succès par Faisst & Eckhardt (2003) puis Wedin & Kerswell (2004) pour obtenir des solutions ondes non linéaires en écoulement d'un fluide newtonien dans une conduite à section circulaire ; ces résultats remarquables ont d'ailleurs été récemment confirmés expérimentalement (Hof et al. 2004).

La question d'une extension de ces résultats à des *fluides non newtoniens*, pour lesquels la *transition vers la turbulence* est encore moins bien comprise que dans le cas des fluides newtoniens, se pose alors naturellement. Au LEMTA l'équipe de Chérif Nouar, chargé de recherche CNRS, s'attaque à ces problèmes en *écoulements ouverts* à la fois par les approches théorique et expérimentale, en complément d'études plutôt consacrées à la *physique de ces fluides* et à des *écoulements fermés* menées par François Caton, chargé de recherche CNRS, et trois maîtres de conférence, Olivier Botella, Christophe Baravian et Laurent Cordier⁸. Ces équipes s'intéressent plus particulièrement à des *fluides rhéofluidifiants*, comme beaucoup de fluides agro-alimentaires, des boues, des ciments, des fluides rencontrés dans l'industrie pétrolière, etc... Au niveau théorique bien peu de résultats sont disponibles sur les *écoulements ouverts de fluides rhéofluidifiants*. En collaboration avec ces équipes, nous envisageons de rechercher numériquement dans ces systèmes des solutions *ondes non linéaires* du type de celles trouvées par Waleffe (1998, 2003) puis Faisst & Eckhardt (2003), Wedin & Kerswell (2004). On pourrait commencer par étudier des écoulements entre deux plans, puis passer au cas d'écoulements en conduite rectiligne à section circulaire. En faisant référence à la phrase de conclusion du tout premier paragraphe de ce mémoire, j'étudierais alors des *écoulements de fluides complexes dans des géométries complexes...*

§ § §

D'autres applications dans d'autres domaines de la *géophysique* ou en *physique des plasmas* pourraient aussi être envisagées, mais cela c'est une autre histoire...

⁷Par exemple suivant les principes du procédé auto-entretenu proposé par Waleffe (1997) et cité page 84. Cette procédure a été appliquée à des écoulements plans par ce même auteur, cf. Waleffe (1998, 2003).

⁸Notamment dans le cadre de l'action concertée incitative jeunes chercheurs *fluides structurés : expériences, modélisation et simulations numériques* dont ces quatre derniers bénéficient.

Références bibliographiques personnelles

- [1] PLAUT, E., JOETS, A. & RIBOTTA, R. 1997 Optical characterization of the director field in a distorted nematic layer. *J. Phys. III France* **7**, 2459-2474.
- [2] PLAUT, E. & RIBOTTA, R. 1997 Cascade of structures in the thermoconvection of a nematic in the director-dominated regime. *EuroPhys. Lett.* **38**, 441-446.
- [3] PLAUT, E. & RIBOTTA, R. 1997 Weakly nonlinear analysis of the secondary bimodal instability in planar nematic convection. *Phys. Rev. E* **56**, R 2375-2378.
- [4] PLAUT, E. & RIBOTTA, R. 1998 Spatio-temporal patterns in the Thermoconvection of a planar nematic layer : I. Weakly nonlinear models. *Eur. Phys. J. B* **5**, 265-281 *annexe F*.
- [5] PLAUT, E., PASTUR, L. & RIBOTTA, R. 1998 Spatio-temporal patterns in the Thermoconvection of a planar nematic layer : II. Experiments. *Eur. Phys. J. B* **5**, 283-297 *annexe G*.
- [6] PLAUT, E., DECKER, W., ROSSBERG, A. G., KRAMER, L., PESCH, W., BELAIDI, A. & RIBOTTA, R. 1997 New symmetry breaking in nonlinear electroconvection of nematic liquid crystals. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2367-2370. *annexe H*.
- [7] PLAUT, E. & PESCH, W. 1999 Extended weakly nonlinear theory of planar nematic convection. *Phys. Rev. E* **59**, 1747-1769 *annexe I*.
- [8] DRESSEL, B., JOETS, A., PASTUR, L., PESCH, W., PLAUT, E. & RIBOTTA, R. 2002 Competition of periodic and homogeneous modes in extended dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 024503-1-4.
- [9] GLEESON, J. T., GHEORGHIU, N. & PLAUT, E. 2002 Electric Nusselt number characterization of electroconvection in nematic liquid crystals. *Eur. Phys. J. B* **26**, 515-520.
- [10] PLAUT, E. & BUSSE, F. H. 2002 Low-Prandtl-number convection in a rotating cylindrical annulus. *J. Fluid Mech.* **464**, 345-363 *annexe J*.
- [11] PLAUT, E. 2003 Nonlinear dynamics of traveling waves in rotating Rayleigh-Bénard convection : effects of the boundary conditions and of the topology. *Phys. Rev. E* **67**, 046303-1-11 *annexe K*.
- [12] PLAUT, E. & BUSSE, F. H. 2005 Multicellular convection in rotating annuli. *J. Fluid Mech.* **528**, 119-133 *annexe L*.

Autres références bibliographiques

- ARANSON, I. S. & KRAMER, L. 2002 The world of the Complex Ginzburg-Landau Equation. *Rev. Mod. Phys.* **74**, 99–143.
- AUBERT, J., BRITO, D., NATAF, H. C., CARDIN, P. & MASSON, J.-P. 2001 A systematic experimental study of rapidly rotating spherical convection in water and liquid gallium. *Phys. Earth Planet. Inter.* **128**, 51–74.
- AUBERT, J., GILLET, N. & CARDIN, P. 2003 Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells. *Geochem. Geophys. Geosyst.* **4**, 1052–1–19.
- BARTHELET, P., CHARRU, F. & FABRE, J. 1995 Experimental study of interfacial long waves in a two-layer shear flow. *J. Fluid Mech.* **303**, 23–53.
- BERGE, L. I., AHLERS, G. & CANNELL, D. S. 1993 Thermal convection in a planar nematic liquid crystal with a stabilizing magnetic field. *Phys. Rev. E* **48**, R3236–3239.
- BERREMAN, D. W. & HEFFNER, W. R. 1981 New bistable liquid-crystal twist cell. *J. Appl. Phys.* **52**, 3032–3039.
- BODENSCHATZ, E., PESCH, W. & AHLERS, G. 2000 Recent developments in Rayleigh-Bénard Convection. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 709–778.
- BODENSCHATZ, E., ZIMMERMANN, W. & KRAMER, L. 1988 On electrically driven pattern-forming instabilities in planar nematics. *J. Phys. France* **49**, 1875–1899.
- BOLOMEY, P. H. & DIMITROPOULOS, C. 1976 Formation d'un réseau bidimensionnel dans un cristal liquide nématique soumis à un champ électrique alternatif. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **36**, 75–88.
- BRUHN, B., KOCH, B. P. & JONAS, P. 1998 Amplitude equation at ionization instability and the onset of turbulence in a neon glow discharge. *Phys. Rev. E* **58**, 3793–3805.
- BUSSE, F. H. 1970 Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.* **44**, 441–460.
- BUSSE, F. H. 2000 Homogeneous Dynamos in Planetary Cores and in the Laboratory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 383–408.
- BUSSE, F. H. 2003 The sequence-of-bifurcations approach towards understanding turbulent fluid flow. *Surveys in Geophys.* **24**, 269–288.
- BUSSE, F. H. & CARRIGAN, C. R. 1974 Convection induced by centrifugal buoyancy. *J. Fluid Mech.* **62**, 579–592.
- BUSSE, F. H. & OR, A. C. 1986 Convection in a rotating cylindrical annulus : thermal Rossby waves. *J. Fluid Mech.* **166**, 173–187.
- CARDIN, P. & OLSON, P. 1995 The influence of toroidal magnetic field on thermal convection in the core. *Earth Planet. Science Lett.* **132**, 167–181.

- CHARRU, F., MOULLERON, H. & EIFF, O. 2004 Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.* **519**, 55–80.
- DENNIN, M. 2000 Direct observation of a twist mode in electroconvection. *Phys. Rev. E* **62**, 6780–6786.
- DENNIN, M., TREIBER, M., KRAMER, L., AHLERS, G. & CANNELL, D. S. 1996 Origin of traveling rolls in electroconvection of nematic liquid crystals. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 319–322.
- DEWEL, G., MÉTENS, S., HILALI, M., BORCKMANS, P. & PRICE, C. B. 1995 Resonant patterns through coupling with a zero mode. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4647–4650.
- DORMY, E. 1997 Modélisation numérique de la dynamo terrestre. PhD thesis, Institut de Physique du Globe de Paris.
- DORMY, E., SOWARD, A. M., JONES, C. A., JAULT, D. & CARDIN, P. 2004 The onset of thermal convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.* **501**, 43–70.
- DRAZIN, P. D. & REID, W. H. 1981 *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- DUBOIS-VIOLETTE, E. 1971 Instabilités hydrodynamiques d'un nématique soumis à un gradient thermique. *C. R. Acad. Sci. B* **273**, 923–926.
- DUBOIS-VIOLETTE, E., DE GENNES, P. G. & PARODI, O. 1971 Hydrodynamic instabilities of nematic liquid crystals under a.c. electric field. *J. Phys. France* **32**, 305–317.
- FAISST, H. & ECKHARDT, B. 2003 Traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 224502–1–4.
- FENG, Q., PESCH, W. & KRAMER, L. 1992 Theory of Rayleigh-Bénard convection in planar nematic liquid crystals. *Phys. Rev. A* **45**, 7242–7256.
- FUJIMURA, K. 1987 Landau constant of plane Poiseuille flow near the neutral state. *Physics of Fluids* **30**, 1216–1218.
- FÜNFSCILLING, D., SAMMULI, B. & DENNIN, M. 2003 Patterns of electroconvection in the nematic liquid crystal N4. *Phys. Rev. E* **67**, 016207–1–7.
- GOLDSTEIN, H. F., KNOBLOCH, E., MERCADER, I. & NET, M. 1993 Convection in a rotating cylinder. Part 1. Linear theory for moderate Prandtl numbers. *J. Fluid Mech.* **248**, 583–604.
- GREENSPAN, H. P. 1968 *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press.
- GUCKENHEIMER, J. & HOLMES, P. 1983 *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer.
- GUYON, E. & PIERANSKI, P. 1972 Étude expérimentale de la convection dans un film de cristal liquide nématique. *C. R. Acad. Sci. B* **274**, 656–658.
- GUYON, E., PIERANSKI, P. & BOIX, M. 1978 Convection thermique dans les films nématiques orientés obliquement. *J. Phys. France* **39**, 99–103.
- HAKEN, H. 1977 *Synergetics - An introduction*. Springer-Verlag.
- HALL, P. 1984 Evolution equations for Taylor vortices in the small-gap limit. *Phys. Rev. A* **29**, 2921–2923.
- HAYOT, F. & POMEAU, Y. 1994 Turbulent domain stabilization in annular flows. *Phys. Rev. E* **50**, 2019–2021.
- HECKE, M. V. 1996 The amplitude description of nonequilibrium patterns. PhD thesis, Universiteit Leiden.

- HECKE, M. V. & SAARLOOS, W. V. 1997 Convection in rotating annuli : Ginzburg-Landau equation with tunable coefficients. *Phys. Rev. E* **55**, R1259–1262.
- HEILMEIER, G. H., ZANONI, L. A. & BARTON, L. A. 1968 Dynamic scattering : a new electrooptic effect in certain classes of nematic liquid crystals. *Proc. IEEE* **56**, 1162–1171.
- HELFRICH, W. 1969 Conduction-induced alignment of nematic liquid crystals : basic model and stability considerations. *J. Chem. Phys.* **51**, 4092–4105.
- HERBERT, T. 1980 Nonlinear stability of parallel flows by high-order amplitude expansions. *AIAA Jl* **18**, 243–248.
- HERRMANN, J. & BUSSE, F. H. 1993 Asymptotic theory of wall-attached convection in a rotating fluid layer. *J. Fluid Mech.* **255**, 183–194.
- HERRMANN, J. & BUSSE, F. H. 1997 Convection in a rotating cylindrical annulus, Part 4 : Modulations and transition to chaos at low Prandtl numbers. *J. Fluid Mech.* **350**, 209–229.
- HOF, B., VAN DOORNE, C. W. H., WESTERWEEL, J., NIEUWSTADT, F. T. M., FAISST, H., ECKHARDT, B., WEDIN, H., KERSWELL, R. R. & WALEFFE, F. 2004 Experimental observation of nonlinear traveling waves in turbulent pipe flow. *Science* **305**, 1594–1598.
- HOLTON, J. R. 1992 *An introduction to dynamic meteorology*. Academic Press.
- HUERRE, P. & ROSSI, M. 1998 Hydrodynamic instabilities in open flows. *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities* (ed. C. Godrèche & P. Manneville), pp. 81–294. Cambridge University Press.
- JANIAUD, B., KOKUBO, H. & SANO, M. 1993 Coupled phase instability of a cellular pattern. *Phys. Rev. E* **47**, R2237–2240.
- JOETS, A. & RIBOTTA, R. 1986 Hydrodynamic transitions to chaos in the convection of an anisotropic fluid. *J. Phys. France* **47**, 595–606.
- KAI, S., YAMAGUCHI, K. & HIRAKAWA, K. 1975 A new pattern in a nematic liquid crystal. *Jap. J. Appl. Phys.* **14**, 1385–1386.
- KAISER, M. & PESCH, W. 1993 Amplitude equations for the electrohydrodynamic instability in nematic liquid crystals. *Phys. Rev. E* **48**, 4510–4528.
- KLINE, M. & KAY, I. 1965 *Electromagnetic theory and geometrical optics*. Interscience Publishers.
- KRAMER, L. & PESCH, W. 1996 Electrohydrodynamic instabilities in nematic liquid crystals. *Pattern formation in liquid crystals* (ed. A. Buka & L. Kramer), pp. 221–255. Springer-Verlag.
- KUO, E. Y. & CROSS, M. C. 1993 Traveling-wave wall states in rotating Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. E* **47**, R2245–2248.
- LIU, Y. & ECKE, R. E. 1997 Eckhaus-Benjamin-Feir instability in rotating convection. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4391–4394.
- LIU, Y. & ECKE, R. E. 1999 Nonlinear traveling waves in rotating Rayleigh-Bénard convection : Stability boundaries and phase diffusion. *Phys. Rev. E* **59**, 4091–4105.
- MAUGUIN, C. 1911 Sur les cristaux liquides de Lehmann. *Bull. Soc. Fr. Minéral.* **34**, 71–117.
- MORIN, V. & DORMY, E. 2004 Time dependent β -convection in rapidly rotating spherical shells. *Physics of Fluids* **16**, 1603–1609.

- NAGATA, M. 1990 Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow : bifurcation from infinity. *J. Fluid Mech.* **217**, 519–527.
- NATAF, H. C. & SOMMERIA, J. 2000 *La Physique et la Terre*. Belin - CNRS Editions.
- NING, L. & ECKE, R. E. 1993 Rotating Rayleigh-Bénard convection : Aspect-ratio dependence of the initial bifurcations. *Phys. Rev. E* **47**, 3326–3333.
- OR, A. C. & BUSSE, F. H. 1987 Convection in a rotating cylindrical annulus, Part 2 : Transitions to asymmetric and vacillating flow. *J. Fluid Mech.* **174**, 313–326.
- OSWALD, P. & PIERANSKI, P. 2000 *Les cristaux liquides*. Gordon & Breach.
- PINO, D., MERCADER, I. & NET, M. 2000 Thermal and inertial modes of convection in a rapidly rotating annulus. *Phys. Rev. E* **61**, 1507–1517.
- PINO, D., NET, M., SÁNCHEZ, J. & MERCADER, I. 2001 Thermal Rossby waves in a rotating annulus. Their stability. *Phys. Rev. E* **63**, 056312–1–14.
- REHBERG, I., RASENAT, S. & STEINBERG, V. 1989 Traveling waves and defect-initiated turbulence in electroconvecting nematics. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 756–759.
- REYNOLDS, W. C. & POTTER, M. C. 1967 Finite-amplitude instability of parallel shear flows. *J. Fluid Mech.* **27**, 465–492.
- RIBOTTA, R. & JOETS, A. 1986 Pinching instability of convective rolls in an anisotropic fluid : first step to chaos. *J. Phys. France* **47**, 739–743.
- RIBOTTA, R., JOETS, A. & LEI, L. 1986 Oblique roll instability in an electroconvective anisotropic fluid. *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1595–1597.
- RICHTER, H., BUKA, A. & REHBERG, I. 1995 The electrohydrodynamic instability in a homeotropically aligned nematic : Experimental results. *Spatio-Temporal Patterns in Nonequilibrium Complex Systems* (ed. P. Cladis & P. Palffy-Muhoray), pp. 343–352. Addison-Wesley.
- RIECKE, H. & KRAMER, L. 2000 The stability of standing waves with small group velocity. *Physica D* **137**, 124–142.
- ROSSBERG, A. G., HERTRICH, A., KRAMER, L. & PESCH, W. 1996 Weakly nonlinear theory of pattern-forming systems with spontaneously broken isotropy. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4729–4732.
- RUDROFF, S., ZHAO, H., KRAMER, L. & REHBERG, I. 1998 Secondary instabilities form a codimension-2 point accompanied by a homoclinic bifurcation. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4144–4147.
- SANO, M., SATO, K., NASUNO, S. & KOKUBO, H. 1992 Complex dynamics of a localized target pattern in electrohydrodynamic convection. *Phys. Rev. A* **46**, 3540–3543.
- SCHADT, M. & HELFRICH, W. 1971 Voltage-dependent optical activity of a twisted nematic liquid crystal. *Appl. Phys. Lett.* **18**, 127–128.
- SCHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2004a Quasi-geostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer. *Soumis au J. Fluid Mech.* Preprint sur <http://arxiv.org/abs/physics/0312129>.
- SCHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2004b Quasi-geostrophic kinematic dynamos at low magnetic Prandtl number. *Soumis à Earth Planet. Sci. Lett.* Preprint sur <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00003095>.
- SCHNAUBELT, M. & BUSSE, F. H. 1992 Convection in a rotating cylindrical annulus, Part 3 : Vacillating and spatially modulated flows. *J. Fluid Mech.* **245**, 155–173.

- SERRE, E., CRESPO-DEL ARCO, E. & BONTOUX, P. 2001 Annular and spiral patterns in flows between rotating and stationary discs. *J. Fluid Mech.* **434**, 65–100.
- SERRE, E., BONTOUX, P. & LAUNDER, B. E. 2002 Direct numerical simulation of transitional turbulent flow in a closed rotor-stator cavity. *Flow, Turb. Combust.* **69**, 35–50.
- SIMITEV, R. & BUSSE, F. H. 2004 Patterns of convection in rotating spherical shells. *New J. Phys.* **5**, 97–1–20.
- STUART, J. T. 1960 On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. *J. Fluid Mech.* **9**, 353–370.
- TILGNER, A. & BUSSE, F. H. 1997 Finite-amplitude convection in rotating spherical fluid shells. *J. Fluid Mech.* **332**, 359–376.
- WALEFFE, F. 1997 On a self-sustaining process in shear flows. *Physics of Fluids* **9**, 883–900.
- WALEFFE, F. 1998 Three-dimensional coherent states in plane shear-flows. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4140–4143.
- WALEFFE, F. 2003 Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows. *Physics of Fluids* **15**, 1517–1534.
- WEDIN, H. & KERSWELL, R. R. 2004 Exact coherent structures in pipe flow : travelling wave solutions. *J. Fluid Mech.* **508**, 333–371.
- WILLIAMS, R. 1963 Domains in liquid crystals. *J. Chem. Phys.* **39**, 384–388.
- WINKLER, B. L., RICHTER, H., REHBERG, I., ZIMMERMANN, W., KRAMER, L. & BUKA, A. 1991 Nonequilibrium patterns in the electric-field-induced splay Fréedericksz transition. *Phys. Rev. A* **43**, 1940–1951.
- WITKOWSKI, L. M. & MARTY, P. 1997 Stability of a liquid-metal layer between gas streams with and without a magnetic field. *Physics of Fluids* **9**, 3707–3717.
- ZIMMERMANN, W. & KRAMER, L. 1985 Oblique-roll electrohydrodynamic instability in nematics. *Phys. Rev. Lett.* **55**, 402–405.

Une version électronique de ce document est disponible sur
<http://perso.ensem.inpl-nancy.fr/Emmanuel.Plaut/hdr.pdf>